Variable Complexe

Licence de Mathématiques, 3ème année

Table des matières

Préambule

Dans tout ce qui suit, on identifiera constamment $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ de la façon habituelle : à un nombre complexe $z = x + iy$ correspond le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Il est *très important* de savoir "jongler" avec cette identification :

$$\mathbb{C} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$z = x + iy \longleftrightarrow (x, y)$$

Chapitre 1

Fonctions holomorphes : définitions et exemples

1. Calcul différentiel dans le plan complexe

1.1. Formes différentielles.

NOTATIONS. On notera $\mathcal{L}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ ou $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$. Si $L\in\mathcal{L}(\mathbb{C},\mathbb{C})=\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ et $h\in\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$, on note $L(h)$, ou $L\cdot h$, ou simplement Lh, l'image de h par L.

Remarque. Comme $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4. C'est aussi un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (car on peut multiplier une application linéaire $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ par un nombre *complexe*), de dimension 2.

DÉFINITION 1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$. Une* ***1-forme différentielle*** *sur Ω est une application $\omega:\Omega\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$.*

Remarque. La définition a en fait un sens même si Ω n'est pas un ouvert, ce qui sera parfois commode.

Exemple. Si $f:\Omega\to\mathbb{C}$ est une fonction différentiable en tout point, alors sa différentielle $df:\Omega\to\mathcal{L}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ est une forme différentielle.

OPÉRATIONS SUR LES FORMES DIFFÉRENTIELLES.

(a) *Addition, multiplication par un scalaire.* La somme de deux 1-formes ω_1 et ω_2 est la forme différentielle définie par la formule

$$(\omega_1+\omega_2)(z)=\omega_1(z)+\omega_2(z)\,.$$

Le produit d'une 1-forme ω par un scalaire $\lambda\in\mathbb{C}$ est la 1 -forme définie par

$$(\lambda\omega)(z)=\lambda\omega(z)\,.$$

(b) *Multiplication par une* ***fonction***. Si ω est une 1-forme différentielle sur Ω et si $f:\Omega\to\mathbb{C}$ est une fonction sur Ω, on définit une 1-forme $f\omega$ en posant

$$(f\omega)(z)=f(z)\omega(z)\,.$$

(La multiplication par un scalaire est un cas particulier : c'est la multiplication par une fonction constante).

1.2. Les deux "écritures canoniques". Dans ce qui suit Ω est un ouvert de $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$.

NOTATION 1. On note $x:\Omega\to\mathbb{R}$ et $y:\Omega\to\mathbb{R}$ les "fonctions coordonnées" sur Ω : si $u=(x_u,y_u)\in\Omega$, alors $x(u)=x_u$ et $y(u)=y_u$. (On devrait en fait écrire x_Ω et y_Ω pour indiquer que leur domaine de définition est Ω ; mais ce serait un peu lourd.)Même si elles sont à valeurs réelles, on considérera x et y comme des fonctions de Ω dans $\mathbb{C}$.

Par définition, les fonctions x et y sont les restrictions à Ω des “applications linéaires coordonnées” $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ et $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ définies par $\pi_i(h_1, h_2) = h_i$. Elles sont donc différentiables sur Ω, avec pour tout $u \in \Omega$:

$$dx(u) = \pi_1 \quad \text{et} \quad dy(u) = \pi_2.$$

Autrement dit, si $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$dx(u)h = h_1 \quad \text{et} \quad dy(u)h = h_2\,.$$

Proposition 1.2. *Toute* 1*-forme différentielle sur* Ω *s'écrit de manière unique sous la forme*

$$\omega = Pdx + Qdy\,,$$

où P *et* Q *sont des fonctions sur* Ω*.*

Démonstration. Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Par définition des applications linéaires coordonnées, on a $\pi_i(e_j) = \delta_{i,j}$ pour $i, j \in \{1, 2\}$. On en déduit facilement que (π_1, π_2) est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$: si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, alors $L = L(e_1)\pi_1 + L(e_2)\pi_2$ car ces deux applications linéaires prennent les mêmes valeurs sur la base (e_1, e_2), donc (π_1, π_2) est génératrice ; et si $\lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2 = 0$ on obtient $\lambda_i = 0$ en évaluant sur e_i, donc (π_1, π_2) est libre.

Si maintenant ω est une 1-forme différentielle sur Ω alors, pour tout $u \in \Omega$, il existe un unique couple de scalaires (λ_u, μ_u) tel que

$$\begin{aligned} \omega(u) &= \lambda_u\pi_1 + \mu_u\pi_2 \\ &= \lambda_u dx(u) + \mu_u dy(u); \end{aligned}$$

autrement dit, en posant $P(u) = \lambda_u$ et $Q(u) = \mu_u$ il existe un unique couple de fonctions (P, Q) tel que $\omega = Pdx + Qdy$. □

Remarque. Avec les notations de la proposition, les fonctions P et Q sont données par $P(u) = \omega(u)e_1$ et $Q(u) = \omega(u)e_2$, pour tout $u \in \Omega$.

Exemple. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction différentiable sur Ω, alors

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\,. \tag{1.1}$$

Démonstration. On a $df = Pdx + Qdy$ avec $P(u) = df(u)e_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(u)$ et $Q(u) = df(u)e_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(u)$. □

Notation 2. On note $z : \Omega \to \mathbb{C}$ et $\bar{z} : \Omega \to \mathbb{C}$ les fonctions $z \mapsto z$ et $z \mapsto \bar{z}$.

Par définition, les fonctions z et $\bar{z}$ sont les restrictions à Ω des applications $\mathbb{R}$-linéaires $I : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $\bar{I} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définies par $I(h) = h$ et $\bar{I}(h) = \bar{h}$. Donc z et $\bar{z}$ sont différentiables sur Ω, avec pour tout $u \in \Omega$:

$$dz(u) = I \quad \text{et} \quad d\bar{z}(u) = \bar{I}$$

Autrement dit, si $h \in \mathbb{C}$ alors

$$dz(u)h = h \quad \text{et} \quad d\bar{z}(u)h = \bar{h}\,.$$

Par ailleurs, comme $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$, on a par linéarité de la différentiation :

$$dz = dx + idy \quad \text{et} \quad d\bar{z} = dx - idy\,.$$

Proposition 1.3. *Toute* 1*-forme différentielle sur* Ω *s'écrit de manière unique sous la forme*

$$\omega = Adz + Qd\bar{z}\,,$$

où A *et* B *sont des fonctions sur* Ω*.*

Démonstration. Comme $I = \pi_1 + i\pi_2$ et $\bar{I} = \pi_1 - i\pi_2$, on a $\pi_1 = \frac{1}{2}(I + \bar{I})$ et $\pi_2 = \frac{1}{2i}(I - \bar{I})$. On en déduit que $(I, \bar{I})$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, d'où le résultat comme dans la preuve de la proposition 1.2 □

Remarque 1.4. Si $\omega = Pdx + Qdy$ est une 1-forme différentielle sur Ω, alors $\omega : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ est continue ou de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si les fonctions P et Q le sont. De même, si $\omega = Adz + bd\bar{z}$, alors ω est continue ou de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si A et B le sont.

Démonstration. Si ω est continue ou de classe $\mathcal{C}^1$, alors P et Q le sont car $P(u) = \omega(u)e_1$ et $Q(u) = \omega(u)e_2$ pour tout $u \in \Omega$. Inversement, si P et Q sont continues ou de classe $\mathcal{C}^1$, alors ω est continue car $\omega(u) = P(u)\pi_1 + Q(u)\pi_2$. □

Lemme 1.5. (formules de “changements de base”)
Si $\omega = Pdx + Qdy = Adz + Bd\bar{z}$ *est une* 1*-forme différentielle sur* Ω*, alors on a les formules suivantes :*

$$\begin{cases} P = A + B \\ Q = i(A - B) \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} A = \frac{1}{2}(P - iQ) \\ B = \frac{1}{2}(P + iQ) \end{cases}$$

Démonstration. Pour la première accolade, on écrit

$$Pdx + Qdy = A(dx + idy) + B(dx - idy)$$

et on identifie les “fonctions coefficients” devant dx et dy grâce à l'*unicité* dans l'écriture $Pdx + Qdy$. La deuxième accolade se déduit de la première en inversant le système. □

Ce lemme “justifie” la définition suivante.

Définition 1.6. *Si* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *est une fonction différentiable sur* Ω*, on définit deux fonctions* $\frac{\partial f}{\partial z}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ *par*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \end{cases}$$

D'après (1.1) et les formules de changement de base, on a alors

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}\,. \tag{1.2}$$

Exemple. Comme $dz = 1\,dz + 0\,d\bar{z}$ et $d\bar{z} = 0\,dz + 1\,d\bar{z}$, on a (par unicité dans l'écriture $Adz + Bd\bar{z}$)

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}\cdot$$

Exercice. Établir les formules $\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$ et $\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$.

On aura de temps en temps besoin du lemme suivant. Rappelons que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, alors le **laplacien** de f est la fonction

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot$$

LEMME 1.7. *Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, alors* $\Delta f = 4\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar z} = 4\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial \bar z \partial z}\cdot$

Démonstration. Il suffit de calculer calmement $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar z}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar z \partial z}$: c'est un excellent exercice. □

2. Fonctions holomorphes

DÉFINITION 2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$.*

(1) *On dit que f est **$\mathbb{C}$-dérivable** en un point $p \in \Omega$ si la limite*

$$f'(p) := \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{z\to p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p}$$

existe dans $\mathbb{C}$.

(2) *On dit que f est **holomorphe sur** Ω si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point et si la fonction $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ est continue.*

Remarque 1. On verra plus tard que l'hypothèse de continuité faite sur f' est en fait superflue : si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point, alors f' est *automatiquement* continue.

Remarque 2. Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en $p \in \Omega$, alors f est *continue* au point p. Donc, toute fonction holomorphe est continue.

Démonstration. Exo. □

NOTATION. On notera $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Exemples. La fonction $f(z) = z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, avec $f'(z) \equiv 1$. A l'inverse, la fonctions $z \mapsto \bar z$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$ puisque $\mathbb{R}$-linéaire) n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point.

Démonstration. Si $p, h \in \mathbb{C}$ et $h \neq 0$ alors $\frac{\overline{p+h} - \bar p}{h} = \frac{\bar h}{h}$, expression qui n'a pas de limite quand $h \to 0$ car par exemple $\frac{\bar h}{h}$ vaut 1 si h est réel et -1 si h est imaginaire pur. □

PROPRIÉTÉS FORMELLES. Les propriétés formelles de la $\mathbb{C}$-dérivabilité sont les mêmes que celles de la dérivabilité pour les fonctions d'une variable réelle, et les preuves sont identiques :

- Si f et g sont $\mathbb{C}$-dérivables sur Ω, alors $f + g$ et fg sont $\mathbb{C}$-dérivables, avec $(f+g)' = f' + g'$ et $(fg)' = f'g + fg'$. Si de plus g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est $\mathbb{C}$-dérivable, avec
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}\cdot$$
- Si $f : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ et $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ sont $\mathbb{C}$-dérivables et si $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$, alors $g \circ f$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω_1, avec
$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'\,.$$

CONSÉQUENCES. Si $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ est une fonction polynomiale, alors P est holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec $P'(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}$. De même, toute fonction rationnelle $f(z) = P(z)/Q(z)$ est holomorphe sur son domaine de définition.

DÉFINITION 2.2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $M_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application linéaire définie par $M_\lambda(h) = \lambda h$. On dit qu'une application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est une **similitude directe** si $L = M_\lambda$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Remarque 1. Une application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est une similitude directe si et seulement si elle est $\mathbb{C}$-linéaire, et dans ce cas on a $L = M_{L(1)}$.

Démonstration. Il est clair que toute similitude est $\mathbb{C}$-linéaire. Inversement, si $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire, alors $L(h) = L(h \times 1) = h \times L(1)$ et donc $L = M_{L(1)}$. □

Remarque 2. Munissons $\mathbb{C}$ de la norme "module" et $L(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ de la norme subordonnée. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\|M_\lambda\| = |\lambda|$.

Démonstration. C'est évident car si $h \in \mathbb{C}$ alors $|M_\lambda(h)| = |\lambda h| = |\lambda| \times |h|$. □

PROPOSITION 2.3. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $p \in \Omega$. Alors f est $\mathbb{C}$-dérivable en p si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées : f est différentiable en p **et de plus** $df(p)$ est une similitude directe. Dans ce cas, on a $df(p) = M_{f'(p)}$.*

Démonstration. Supposons que f soit $\mathbb{C}$-dérivable en p, et posons $\lambda = f'(p)$. Par définition, on peut alors écrire

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lambda + \varepsilon(h)\,,$$

où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 quand $h \to 0$. En multipliant par h, on en déduit

$$f(p+h) = f(p) + \lambda h + h\varepsilon(h) = f(p) + M_\lambda(h) + o(|h|)\,,$$

ce qui montre que f est différentiable en p avec $df(p) = M_\lambda = M_{f'(p)}$.

Inversement, supposons que f soit différentiable en p et que $df(p)$ soit une similitude M_λ. Alors

$$f(p+h) = f(p) + M_\lambda(h) + o(|h|) = f(p) + \lambda \times h + o(|h|)$$

quand $h \to 0$, et donc

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lambda + \frac{o(|h|)}{h} \xrightarrow{h\to 0} \lambda\,.$$

Par conséquent, f est $\mathbb{C}$-dérivable en p et $f'(p) = \lambda$. □

COROLLAIRE 2.4. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point, alors $df = f'dz$.*

Démonstration. D'après la proposition, on a $df(u)h = f'(u) \times h$, autrement dit $df(u)h = f'(u)dz(u)h$ pour tout $u \in \Omega$ et $h \in \mathbb{C}$.

□

COROLLAIRE 2.5. *Toute fonction holomorphe est de classe $\mathcal{C}^1$.*

Démonstration. Si $f \in H(\Omega)$ alors $df = f'dz$ et donc $df : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est continue d'après la remarque 1.4. □

COROLLAIRE 2.6. *Pour une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est holomorphe ;*

(ii) *$df = g\,dz$ pour une certaine fonction g continue sur Ω ;*

(iii) *f vérifie l'**équation de Cauchy-Riemann** $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$.*
Dans ce cas, on a nécessairement $g = f'$ dans (ii).

Démonstration. On sait déjà que si f est holomorphe alors $df = f'dz$. Inversement, si $df = gdz$ pour une certaine fonction g, alors $df(u) = g(u)dz(u) = g(u)I = M_{g(u)}$ pour tout $u \in \Omega$; donc f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point avec $f' = g$, et f est holomorphe si g est continue. Ainsi, (i) et (ii) sont équivalentes. L'équivalence de (ii) et (iii) vient de l'identité $df = \frac{\partial f}{\partial z}\, dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\, d\bar z$ et de l'unicité dans l'écriture $Adz + Bd\bar z$. □

Corollaire 2.7. *Si $f \in H(\Omega)$, alors $f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$.*

Démonstration. On a $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$ car d'une part $df = f'dz$ et d'autre part $df = \frac{\partial f}{\partial z}dz$ d'après l'équation de Cauchy-Riemann. Toujours d'après Cauchy-Riemann et par définition de $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$, on a $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, i.e. $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$. Enfin, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}$. □

Corollaire 2.8. ("théorème fondamental de l'analyse")
Soit $f \in H(\Omega)$. Si $p \in \Omega$ et si $h \in \mathbb{C}$ est tel que le segment $[p, p+h]$ est contenu dans Ω, alors

$$f(p+h) = f(p) + \int_0^1 f'(p+th) \times h\, dt\,.$$

Démonstration. On applique le théorème fondamental de l'analyse usuel à la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(t) = f(\gamma(t))$, où $\gamma(t) = p + th$. Cette fonction est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ puisque $\gamma(t) \in \Omega$ pour tout $t \in [0,1]$, et on a $\varphi'(t) = df(\gamma(t))\gamma'(t) = f'(p+th) \times h$. Donc $f(p+h) - f(p) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\, dt = \int_0^1 f'(p+th) \times h\, dt$. □

Exercice. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\varphi : U \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur un ouvert contenant $\varphi(U)$, alors

$$d(f \circ \varphi) = (f' \circ \varphi)\, d\varphi\,.$$

Proposition 2.9. *Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Alors L est une similitude directe si et seulement si sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ est de la forme*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, on a $L = M_\lambda$, où $\lambda = a + ib$.

Démonstration. Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. On a $e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1 + i0 = 1$ et $e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0 + i1 = i$. Si L est une similitude, $L = M_\lambda$ avec $\lambda = a + ib$, on a $L(e_1) = \lambda \times 1 = a + ib = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ et $L(e_2) = \lambda \times i = ia - b = \left(\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right)$, et par conséquent L a pour matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2). Inversement, si la matrice de L est de ce type et si on pose $\lambda = a + ib$, alors $L = M_\lambda$ puisque ces deux applications linéaires ont la même matrice. □

Corollaire 2.10. (forme réelle de l'équation de Cauchy-Riemann)
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et écrivons $f = u + iv$ (où u et v sont à valeurs réelles). Alors f est holomorphe si et seulement si

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad et \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Démonstration. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est holomorphe si et seulement si $df(z)$ est une similitude directe pour tout $z \in \Omega$ (d'après la proposition 2.3) ; autrement dit : si et seulement si la matrice jacobienne de f en tout point est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. D'où le résultat par définition de la matrice jacobienne puisque $f = u + iv = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$. □

Corollaire 2.11. *Si $f \in H(\Omega)$ et si on note $J_f(z)$ le déterminant jacobien de f en un point $z \in \Omega$, alors*

$$J_f(z) = |f'(z)|^2 .$$

Démonstration. Comme $df(z) = M_{f'(z)}$, la matrice jacobienne de f au point z est $\mathrm{Jac}_f(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, où $f'(z) = a + ib$. Donc $J_f(z) = a^2 + b^2 = |f'(z)|^2$. □

Exercice. Montrer que pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ quelconque, on a

$$J_f = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|^2 .$$

3. Séries entières ; fonctions analytiques

3.1. Séries entières ; rayon de convergence.

Définition 3.1. *Une **série entière** est une série de fonctions de la variable $z \in \mathbb{C}$ de la forme $\Sigma(z) = \sum_{n \geqslant 0} c_n z^n$, où les c_n sont des nombres complexes.*

Remarque 1. Il est important d'être conscient qu'une série entière est un objet **formel**. La série peut très bien ne converger pour aucun point (sauf $z = 0$).

Remarque 2. Par **convention**, on pose $z^0 = 1$ pour tout nombre complexe z. En particulier, on a $0^0 = 1$.

Notation. Pour $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on notera $D(a, r)$ le **disque ouvert de centre a et de rayon r** dans $\mathbb{C}$:

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - a| < r\} .$$

Le disque **fermé** correspondant sera noté $\overline{D}(a, r)$:

$$\overline{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - a| \leqslant r\} .$$

La notation $\overline{D}$ n'est pas choisie au hasard : le disque fermé est bien l'adhérence du disque ouvert !

Lemme 3.2. (lemme d'Abel)
*Soit $(c_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres complexes, et soit $\rho > 0$. Si la suite $(c_n \rho^n)$ est bornée, alors la série $\sum c_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \rho$, et on a **convergence normale** sur tout disque fermé $\overline{D}(0, r)$ de rayon $r < \rho$.*

Démonstration. Choisissons un constante M telle que $|c_n| \rho^n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $z \in \mathbb{C}$, on a $c_n z^n = c_n \rho^n \times \left(\frac{z}{\rho}\right)^n$, et donc

$$|c_n z^n| \leqslant M\,(|z|/\rho)^n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la série $\sum c_n z^n$ est absolument convergente si $|z|/\rho < 1$, i.e. $|z| < \rho$. Si $0 \leqslant r < \rho$, alors

$$\forall z \in \overline{D}(0, r)\ :\ |c_n z^n| \leqslant M\,(r/\rho)^n ,$$

majoration par le terme général d'une série convergente indépendante de $z \in \overline{D}(0,r)$. Donc la série $\sum c_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$.

□

Théorème 3.3. *Soit $\Sigma = \sum c_n z^n$ une série entière. Il existe un unique "nombre" $R \in [0,\infty]$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(i) *la série $\sum c_n z^n$ converge pour $|z| < R$;*

(ii) *la série $\sum c_n z^n$ diverge pour $|z| > R$.*

De plus, la série $\sum c_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et on a convergence normale sur tout compact de $D(0,R)$. Le "nombre" R s'appelle le ***rayon de convergence*** *de la série entière Σ.*

Démonstration. Posons $R = \sup\{\rho \geqslant 0;$ la suite $(|c_n|\rho^n)$ est bornée$\}$. Cette définition a bien un sens : R existe dans $[0,\infty]$ car l'ensemble dont on prend la borne supérieure est non vide (il contient $r = 0$). Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| < R$ alors on peut trouver $\rho > |z|$ tel que la suite $|c_n|\rho^n$ est bornée, donc la série $\sum c_n z^n$ converge absolument d'après le lemme d'Abel. Si $|z| > R$ alors la suite $(|c_n z^n|)$ n'est pas bornée par définition de R, donc la série $\sum c_n z^n$ ne peut pas converger. Ainsi, R vérifie (i) et (ii). De plus, la série $\sum c_n z^n$ converge normalement sur tout disque $\overline{D}(0,r)$ de rayon $r < R$ d'après le lemme d'Abel, donc sur tout compact de $D(0,R)$.

L'unicité est "évidente" : si $R' \in [0,\infty]$ vérifie (i) et (ii), on ne peut pas avoir $R' < R$ sinon on obtiendrait une contradiction en choisissant r tel que $R' < r < R$. (La série $\sum c_n r^n$ devrait à la fois converger car $r < R$ et diverger car $r > R'$). De même on ne peut pas avoir $R' > R$, donc $R' = R$. □

Notation. On notera $R(\Sigma)$ le rayon de convergence d'une série entière Σ.

Reformulation. Le rayon de convergence d'une série entière $\sum c_n z^n$ est l'unique nombre R tel que la série $\sum |c_n| r^n$ converge pour $0 \leqslant r < R$ et diverge pour $r > R$.

Remarque 1. La preuve du théorème a établi qu'on a

$$R(\Sigma) = \sup\{r \geqslant 0;\ \text{la suite } (|c_n| r^n) \text{ est bornée}\}.$$

On peut donc utiliser les faits suivants pour déterminer $R(\Sigma)$: étant donné $r \in \mathbb{R}_+$,

- si la suite $(|c_n| r^n)$ est bornée, alors $R(\Sigma) \geqslant r$;
- si la série $\sum |c_n| r^n$ diverge, alors $R(\Sigma) \leqslant r$.

Remarque 2. Comme le montrent les exemples suivants, on ne peut rien dire de complètement général sur la convergence de $\sum c_n z^n$ pour $|z| = R(\Sigma)$.

(1) Pour $\Sigma(z) = \sum z^n$, on a $R(\Sigma) = 1$ (car la série géométrique $\sum r^n$ converge si $r < 1$ et diverge si $r \geqslant 1$) et la série diverge en tout point z tel que $|z| = 1$.

(2) Pour $\Sigma(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$, on a $R(\Sigma) = 1$ (la suite $\left(\frac{r^n}{n^2}\right)$ est bornée si $r < 1$ et $\sum \frac{r^n}{n^2}$ diverge pour $r > 1$ car en fait $r^n/n^2 \to \infty$) et la série converge en tout point z tel que $|z| = 1$.

(3) pour $\Sigma(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$, on a $R(\Sigma) = 1$ (même raisons que pour $\sum \frac{z^n}{n^2}$), la série diverge pour $z = 1$, mais converge pour $z = -1$ (série alternée), et en fait pour tout point $z \neq 1$ tel que $|z| = 1$ (ce qui n'est pas du tout évident).

La proposition qui va suivre donne une formule générale pour calculer le rayon de convergence d'une série entière. On doit d'abord rappeler la définition de la **limite supérieure** d'une suite de nombres réels (x_n) : la limite supérieure de (x_n) est la plus grande valeur d'adhérence de la suite (x_n) dans $[-\infty, +\infty]$; autrement dit, c'est la plus grande limite possible (dans $[-\infty, +\infty]$) pour une sous-suite de (x_n). On note ce "nombre" $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, ou simplement $\overline{\lim}\, x_n$. Par exemple : si la suite (x_n) converge dans $[-\infty, +\infty]$ alors $\overline{\lim}\, x_n$ est la limite de (x_n) ; on a $\overline{\lim}\,(-1)^n = 1$ car les valeurs d'adhérence de $x_n = (-1)^n$ sont 1 et -1 ; et on a $\overline{\lim}\,(-1)^n \times n^2 = +\infty$.

Exercice 1. Montrer que pour tout nombre réel L, les implications suivantes ont lieu :

- $\overline{\lim}\, x_n < L \Longrightarrow x_n < L$ à partir d'un certain rang ;
- $\overline{\lim}\, x_n > L \Longrightarrow x_n > L$ pour une infinité d'entiers n.

Exercice 2. Montrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites de nombres réels et si (u_n) admet une limite $l > 0$, alors $\overline{\lim}\,(u_n v_n) = l \times \overline{\lim}\, v_n$.

Proposition 3.4. (formule d'Hadamard)
Pour toute série entière $\Sigma = \sum c_n z^n$, le rayon de convergence de Σ est donné par la formule

$$\frac{1}{R(\Sigma)} = \overline{\lim}\, |c_n|^{1/n}.$$

Démonstration. Notons R_0 le "nombre" défini par $\frac{1}{R_0} = \overline{\lim}\, |c_n|^{1/n}$. On va montrer séparément que $R(\Sigma) \geqslant R_0$ et $R(\Sigma) \leqslant R_0$.

Si $0 \leqslant r < R_0$, alors $\overline{\lim}_{n\to\infty}(|c_n|^{1/n} \times r) < 1$, donc on a $|c_n|^{1/n} \times r < 1$ à partir d'un certain rang, i.e. $|c_n| r^n < 1$. La suite $(|c_n| r^n)$ est donc bornée, et par conséquent $R(\Sigma) \geqslant r$. Ceci étant vrai pour tout $r < R_0$, on en déduit $R(\Sigma) \geqslant R_0$.

Si $r > R_0$, alors $\overline{\lim}_{n\to\infty}(|c_n|^{1/n} \times r) > 1$, donc on peut trouver une infinité d'entiers n tels que $|c_n| r^n > 1$. Par conséquent, $c_n r^n$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$, donc la série $\sum |c_n| r^n$ diverge et donc $r \geqslant R(\Sigma)$. Ceci étant vrai pour tout $r > R_0$, on en déduit $R_0 \geqslant R(\Sigma)$. □

Corollaire 3.5. *Soient $\Sigma_0 = \sum c_n z^n$ et $\Sigma_1 = \sum c'_n z^n$ deux séries entières.*

(a) *S'il existe une constante M telle que $|c_n| \leqslant M\, |c'_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R(\Sigma_0) \geqslant R(\Sigma_1)$.*

(b) *Si $c_n, c'_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et si $|c_n| \sim |c'_n|$, alors $R(\Sigma_0) = R(\Sigma_1)$.*

Démonstration. La partie (a) est évidente d'après la formule d'Hadamard puisque $|c_n|^{1/n} \leqslant M^{1/n} |c'_n|^{1/n}$ à partir d'un certain rang et $M^{1/n} \to 1$; et (b) découle de (a) appliqué 2 fois car on a $\frac{1}{2}|c'_n| \leqslant |c_n| \leqslant 2|c'_n|$ à partir d'un certain rang. □

Corollaire 3.6. *Si la suite (c_n) est* ***bornée****, alors le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ est au moins égal à 1.*

Démonstration. On applique le corollaire précédent avec $c'_n = 1$, en se souvenant que le rayon de convergence de $\sum z^n$ est égal à 1. Évidemment, on peut aussi démontrer le résultat directement, sans utiliser la formule d'Hadamard. □

Corollaire 3.7. *Si $|c_n|^{1/n}$ admet une limite $l \in [0, \infty]$, alors $R(\Sigma) = 1/l$.*

Corollaire 3.8. *Si $c_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et si $\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ admet une limite $l \in [0, \infty]$, alors $R(\Sigma) = 1/l$.*

Démonstration. D'après le corollaire précédent, il suffit de montrer que $|c_n|^{1/n}$ tend vers l. On utilise pour cela le lemme suivant, qui est en fait un théorème très célèbre et très important.

LEMME 3.9. (théorème de Cesàro)
Soit (u_n) *une suite de nombres réels. Si* (u_n) *admet une limite* $L \in [-\infty, +\infty]$, *alors* $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ *tend également vers* L *quand* $n \to \infty$.

Preuve du lemme. Supposons d'abord que $L = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \to 0$, on peut trouver $N_0 \geqslant 1$ tel que $|u_k| \leqslant \varepsilon$ pour tout $k \geqslant N_0$. Si $n > N_0$, on a alors

$$\begin{aligned} |S_n| &\leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{N_0-1} u_k\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_0}^{n} |u_k| \\ &\leqslant \frac{C_0}{n} + \varepsilon \times \frac{n-N_0}{n} \\ &\leqslant \frac{C_0}{n} + \varepsilon\,, \end{aligned}$$

où on a posé $C_0 = \left|\sum_{k=0}^{N_0-1} u_k\right|$. Comme $C_0/n \to 0$, on peut trouver $N > N_0$ tel que $C_0/n \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, et on a alors

$$\forall n \geqslant N \ : \ |S_n| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,.$$

Donc S_n tend bien vers 0 quand $n \to \infty$.

Si $L \in \mathbb{R}$, on se ramène au cas "$L = 0$" grâce à l'astuce (très naturelle) suivante : pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$S_n - L = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_k - L)\,,$$

donc on peut appliquer le cas précédent à la suite $(u_n - L)$ pour obtenir que $S_n - L \to 0$.

Supposons maintenant $L = +\infty$. La démonstration est presque identique à celle du cas "$L = 0$", donc on va aller un peu plus vite. Pour tout $A > 0$ donné, on peut trouver N_0 tel que $u_k \geqslant A$ pour tout $k \geqslant N_0$, et on en déduit que si $n > N_0$, alors

$$S_n \geqslant A \times \frac{n-N_0}{n} - \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{N_0-1} u_k\right| = \frac{n-N_0}{n}A - \frac{C_0}{n}\,.$$

Comme $\frac{n-N_0}{n}A \to A$ et $\frac{C_0}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$, on peut trouver $N > N_0$ tel que $\frac{n-N_0}{n}A - \frac{C_0}{n} \geqslant A/2$ pour $n \geqslant N$, et on a alors $S_n \geqslant A/2$ pour tout $n \geqslant N$. Comme $A > 0$ est arbitraire, cela montre que $S_n \to +\infty = L$. Le cas où $L = -\infty$ s'en déduit en considérant $-u_n$. □

Revenons à la preuve du corollaire 3.8. En supposant $c_n \neq 0$ pour tout n, on applique le lemme avec $u_n = \log\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \log|c_{n+1}| - \log|c_n|$, qui tend vers $L = \log l \in [-\infty, +\infty]$. Avec les notations du lemme, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\Big((\log|c_1| - \log|c_0|) + (\log|c_2| - \log|c_1|) + \cdots + (\log|c_n| - \log|c_{n-1}|)\Big) \\ &= \frac{1}{n}(\log|c_n| - \log|c_0|)\,, \end{aligned}$$

et comme $\frac{\log|c_0|}{n}$ tend vers 0 on en déduit que $\frac{\log|c_n|}{n}$ tend vers $\log l$. Donc $|c_n|^{1/n} = \exp\left(\frac{\log|c_n|}{n}\right) \to e^{\log l} = l$. □

Exemples. Pour $\Sigma = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $R(\Sigma) = 1$ car $\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \to 1$. Pour $\Sigma = \sum \frac{z^n}{n!}$, on a $R(\Sigma) = \infty$ car $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n} \to 0$. Pour $\Sigma = \sum n! z^n$, on a $R(\Sigma) = 0$ car $\frac{(n+1)!}{n!} \to \infty$.

Exercice. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 1}(1+\frac{1}{n})^{n^2} z^n$ et $\sum_{k\geqslant 0} z^{2k}$.

3.2. Régularité de la somme d'une série entière.

DÉFINITION 3.10. *Soit $\Sigma(z) = \sum c_n z^n$ une série entière. La* ***série dérivée*** *de Σ est la série entière $\Sigma'(z) = \sum_{n\geqslant 1} n c_n z^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)c_{n+1} z^n$.*

LEMME 3.11. *Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.*

Démonstration. Si $\Sigma = \sum c_n z^n$, alors $\Sigma'(z) = \sum_{n\geqslant 1} n c_n z^{n-1}$ a le même rayon de convergence que $\widetilde{\Sigma}(z) = \sum_{n\geqslant 0} n c_n z^n$ car $\widetilde{\Sigma}(z) = z\Sigma'(z)$ (et donc les deux séries convergent pour les mêmes valeurs de z). D'après la formule d'Hadamard, on a $1/R(\widetilde{\Sigma}) = \overline{\lim}\,(n^{1/n}\,|c_n|^{1/n})$ et donc $R(\widetilde{\Sigma}) = R(\Sigma)$ car $n^{1/n} \to 1$; d'où le résultat. □

THÉORÈME 3.12. *Soit $\Sigma = \Sigma c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ la somme de cette série, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. Alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable dans le disque $D(0,R)$, et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme : on a*

$$\forall k \in \mathbb{N} \ : \ f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, c_n z^{n-k}\,.$$

Démonstration. Pour $N \in \mathbb{N}$, posons $f_N(z) = \sum_{n=0}^N c_n z^n$. Les fonctions f_N sont polynomiales, donc holomorphes sur $D(0,R)$, avec $f_N'(z) = \sum_{n=1}^N n c_n z^{n-1}$. D'après le lemme, la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n c_n z^{n-1}$ a un rayon de convergence égal à R, donc cette série converge normalement sur tout compact de $D(0,R)$. En particulier, la suite (f_N') converge uniformément sur tout compact de $D(0,R)$ vers une fonction $g : D(0,R) \to \mathbb{C}$, qui est continue car les f_N' le sont. Si on pose $\omega_N = f_N' dz$ et $\omega = g dz$, alors $\|\omega_N(u) - \omega(u)\| = \|M_{f_N'(u)-g(u)}\| = |f_N'(u) - g(u)|$ pour tout u, donc $\omega_N(u)$ tend vers $\omega(u)$ uniformément sur tout compact de $D(0,R)$. On est donc dans la situation suivante : $f_N(z) \to f(z)$ pour tout $z \in D(0,R)$, et $df_N = f_N' dz \to g dz$ uniformément sur tout compact. D'après un théorème connu sur les suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $df = g dz$. Autrement dit, f est holomorphe avec $f'(z) = g(z) = \sum_{n=1}^\infty n c_n z^{n-1}$. Par récurrence, on montre alors que f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable avec $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^\infty n(n-1)\cdots(n-k+1)\, c_n z^{n-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

3.3. Fonctions analytiques.

DÉFINITION 3.13. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$.*

(1) *On dit que f est* ***développable en série entière*** *au voisinage d'un point $a \in \Omega$ s'il existe $r > 0$ et une suite de coefficients $(c_n)_{n\geqslant 0}$ (dépendant de a) tels que $D(a,r) \subset \Omega$ et*

$$\forall z \in D(a,r) \ : \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n\,,$$

où la série converge en tout point de $D(ar)$.

(2) *On dit que f est $\mathbb{C}$-**analytique** sur Ω si elle est développable en série entière au voisinage de chaque point de Ω.*

Du théorème 3.12, on déduit facilement le résultat suivant.

PROPOSITION 3.14. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-analytique, alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω. De plus, si $a \in \Omega$ et si $f(z) = \sum_0^\infty c_n(z-a)^n$ sur un certain disque $D(a,r)$, alors les coefficients c_n sont déterminés de manière unique par la fonction f : on a*

$$\forall k \in \mathbb{N} \ : \ c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \, .$$

Démonstration. Soit $a \in \Omega$ quelconque, et soit $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Omega$ et $f(z) = \sum_0^\infty c_n(z-a)^n$ sur $D(a,r)$, pour une certaine suite de coefficients (c_n). La série entière $\Sigma(w) = \sum c_n w^n$ a un rayon de convergence au moins égal à r, donc sa somme g est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable dans le disque $D(0,r)$, d'après le théorème 3.12. Comme $f(z) = g(z-a)$ dans $D(a,r)$, on en déduit que f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable dans $D(a,r)$, donc au voisinage de a. Ceci étant vrai pour tout point $a \in \Omega$, cela signifie que f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω. Enfin, avec les notations précédentes on a $f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z-a) = \sum_k^\infty n(n-1)\cdots(n-k+1)\, c_n(z-a)^{n-k}$ pour tout $z \in D(a,r)$, d'où $f^{(k)}(a) = k!c_k \times 0^0 + 0 = k!c_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

COROLLAIRE 3.15. *Toute fonction $\mathbb{C}$-analytique est holomorphe.*

4. Fonctions usuelles

4.1. Exponentielle.

DÉFINITION 4.1. *Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on pose $e^z := e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.*

Cette définition suppose évidemment que l'on connaisse déjà l'exponentielle réelle et les fonctions sinus et cosinus.

PROPOSITION 4.2. *On a $e^z \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ pour tous z, z'.*

Démonstration. Si $z = x + iy$ alors $|e^z| = e^x |e^{iy}| = e^x$ car $|e^{iy}| = 1$, donc $|e^z| > 0$ et $e^z \neq 0$.

Si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, alors

$$e^{z+z'} = e^{x+x'+i(y+y')} = e^x e^{x'} e^{i(y+y')} \, .$$

Pour prouver que $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, il suffit donc de vérifier qu'on a $e^{i(y+y')} = e^{iy}e^{iy'}$; mais ceci est la traduction des formules d'addition pour le sinus et le cosinus :

$$\begin{aligned} e^{i(y+y')} &= \cos(y+y') + i\sin(y+y') \\ &= (\cos y \cos y' - \sin y \sin y') + i(\cos y \sin y' + \sin y \cos y') \\ &= (\cos y + i \sin y)(\cos y' + i \sin y') \, . \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 4.3. *La fonction exponentielle est un homomorphisme surjectif de $(\mathbb{C}, +)$ sur $(\mathbb{C}^*, \times)$, de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Notons E la fonction exponentielle. Que E soit un homorphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ est la traduction de la proposition. La surjectivité est claire puisque tout nombre complexe $w \neq 0$ peut s'écrire $w = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, et donc $w = e^{\log r + i\theta}$. Pour déterminer $\ker(E) = \{z;\ e^z = 1\}$, on utilise le fait suivant :

un nombre complexe w est égal à 1 si et seulement si $|w| = 1$ et $\mathrm{Re}(w) = 1$. Comme $|e^z| = e^x$ si $z = x + iy$, on a donc les équivalences suivantes (pour $z = x + iy$) :

$$\begin{aligned} z \in \ker(E) &\iff e^x = 1 \text{ et } \mathrm{Re}(e^z) = 1 \\ &\iff x = 0 \text{ et } \mathrm{Re}(e^{iy}) = 1 \\ &\iff x = 0 \text{ et } \cos y = 1 \\ &\iff x = 0 \text{ et } y \in 2\pi\mathbb{Z}\,, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\ker(E) = 2i\pi\mathbb{Z}$. □

Corollaire 4.4. *L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un homomorphisme surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{T}, \times)$, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.*

Remarque. Il est **très important** de retenir le fait suivant, qu'on a utilisé dans la preuve du corollaire 4.3 : si $z \in \mathbb{C}$, alors

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re(z)}}\,.$$

Proposition 4.5. *La fonction exponentielle est holomorphe sur $\mathbb{C}$, avec $(e^z)' = e^z$.*

Démonstration. Notons $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ la fonction exponentielle, considérée comme fonction de deux variables réelles. On a $E = u + iv$ avec

$$u(x, y) = e^x \cos y \text{ et } v(x, y) = e^x \sin y\,.$$

Il est clair que E est de classe $\mathcal{C}^1$, et un calcul immédiat montre qu'on a $\frac{\partial u}{\partial x} = u = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial x} = v = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Ainsi, E vérifie la forme réelle de l'équation de Cauchy-Riemann et est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$. Enfin, on a

$$E' = \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = u + iv = E\,.$$

□

Proposition 4.6. *On a $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, où la série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini, donc elle converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé, et soit $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $\varphi(t) = e^{tz}$. D'après la proposition précédente, la fonction exponentielle est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$, avec $(e^u)^{(k)} = e^u$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$, avec $\varphi^{(k)}(t) = z^k e^{tz}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Taylor, on a

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) \times (1 - 0) + \cdots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \times (1 - 0)^n + \int_0^1 \frac{(1 - t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\, dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit

$$e^z = 1 + z + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - t)^n e^{tz} dt\,. \tag{4.1}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - t)^n e^{tz} dt \right| &\leqslant \frac{|z|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - t)^n |e^{tz}|\, dt \\ &\leqslant \frac{|z|^{n+1}}{n!} \times e^{\mathrm{Re}(z)}\,, \end{aligned}$$

et donc $\frac{z^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n e^{tz}dt$ tend vers 0 quand $n\to\infty$. On peut donc passer à la limite dans (4.1) pour obtenir la formule souhaitée. □

Exercice. En utilisant la formule du binôme et le développement en série entière de l'exponentielle, montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

4.2. Fonctions trigonométriques. Les fonctions trigonométriques complexes se définissent à partir de l'exponentielle.

DÉFINITION 4.7. *Pour $z\in\mathbb{C}$, on pose $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$ et $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$.*

La vérification des propriétés suivantes est laissée en exercice.

(1) Les fonctions sin et cos sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.
(2) Les fonctions sin et cos sont développables en série entière sur $\mathbb{C}$, avec

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot$$

(3) Les formules trigonométriques usuelles pour $\sin(u+v)$ et $\cos(u+v)$ restent valables pour tous $u,v\in\mathbb{C}$.

LEMME 4.8. *On a $\cos z = 0$ si et seulement si z est de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$, où $k\in\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Par définition de la fonction cos, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\iff e^{iz} = -e^{-iz}\\ &\iff e^{2iz} = -1 = e^{i\pi}\\ &\iff e^{i(2z-\pi)} = 1\\ &\iff 2z-\pi\in 2\pi\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 4.9. *La fonction $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ est bien définie et holomorphe sur $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$*

Exercice 1. Montrer qu'on a $\tan'(z) = 1+\tan^2 z$

Exercice 2. Déterminer le domaine de définitions de $\text{cotan}\, z := \frac{\cos z}{\sin z}\cdot$

4.3. Logarithmes et arguments.

NOTATION. On notera $\log :]0,\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction "logarithme népérien" usuelle, i.e. la réciproque de l'exponentielle réelle.

DÉFINITION 4.10. *Soit $z\in\mathbb{C}^*$.*

(a) *On dit qu'un nombre complexe w est un **logarithme** de z si on a $e^w = z$.*
(b) *On dit qu'un nombre réel θ est un **argument** de z si on a $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}\cdot$*

REMARQUES.

(1) Si $z = re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$, alors $w = \log(r)+i\theta$ est un logarithme de z.

(2) Tout nombre complexe $z \neq 0$ possède *une infinité* de logarithmes et d'arguments. Si z s'écrit $re^{i\theta}$, alors les logarithmes de z sont tous les nombres de la forme $w_k = \log(r) + i(\theta + 2k\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$, et les arguments de z sont tous les nombres de la forme $\theta_k = \theta + 2k\pi$.

(3) Si w est un logarithme de z alors $\mathrm{Re}(w) = \log|z|$, et $\mathrm{Im}(w)$ est un argument de z.

Démonstration. La partie (1) est évidente puisque $e^{\log(r)+i\theta} = e^{\log(r)}e^{i\theta} = z$. Comme $e^{2ik\pi} = 1$ si $k \in \mathbb{Z}$, on en déduit immédiatement que tous les w_k sont des logarithmes de z et que tous les θ_k sont des arguments de z. Réciproquement, si w' est un logarithme de z, alors $e^{w-w'} = zz^{-1} = 1$ et donc $w' - w \in 2i\pi\mathbb{Z}$, ce qui prouve que w' est un w_k ; et de même tout argument de z est un θ_k. Enfin, la partie (3) est évidente : si $w = x + iy$ et si $e^w = z$, alors $|z| = e^x$ (donc $x = \log|z|$) et $z/|z| = e^{iy}$ (donc y est un argument de z). □

Définition 4.11. *La **détermination principale de l'argument** est la fonction* $\arg : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ *définie comme suit :* $\arg(z)$ *est l'unique argument de* z *appartenant à l'intervalle* $]-\pi, \pi]$. *La **détermination principale du logarithme** est la fonction* $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ *définie par* $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$. *Autrement dit, si* $z = re^{i\theta}$ *avec* $r > 0$ ***et*** $\theta \in]-\pi, \pi]$, *alors* $\log(z) = \log(r) + i\theta$.

Exemples.

(1) On a $-1 = e^{i\pi}$, donc $\log(-1) = i\pi$. De même, $i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ et $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, donc $\log(i) = i\frac{\pi}{2}$ et $\log(-i) = -i\frac{\pi}{2}$.

(2) On a $|1-i| = \sqrt{2}$ et $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc $\log(1-i) = \log\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4} = \frac{\log(2)}{2} - i\frac{\pi}{4}$.

Remarque 1. La notation log est intentionnelle : la fonction log prolonge la fonction logarithme réelle.

Remarque 2. En général, on n'a pas $\log(zz') = \log(z) + \log(z')$: cette égalité est vraie seulement *modulo* $2i\pi$. Par exemple, on a $\log(-1 \times i) = \log(-i) = -i\frac{\pi}{2}$, mais $\log(-1) + \log(i) = i\pi + i\frac{\pi}{2} = i\frac{3\pi}{2}$. En fait, on a $\log(zz') = \|og(z) + \log(z')$ si et seuement si $\arg(z) + \arg(z') \in]-\pi, \pi]$ (exo).

Remarque 3. Les fonctions log et arg ne sont pas continues sur $\mathbb{C}^*$. En fait, elles ne sont continues en aucun point de la forme $z = -r$, où $r > 0$.

Démonstration. Pour $\varepsilon \in]0, \pi]$, posons $z_\varepsilon^+ = re^{i(\pi-\varepsilon)}$ et $z_\varepsilon^- = re^{-i(\pi-\varepsilon)}$ (*faire un dessin*). Alors $z_\varepsilon^\pm \to r$ quand $\varepsilon \to 0^+$, mais $\arg(z_\varepsilon^+) = i(\pi - \varepsilon) \to i\pi$ et $\arg(z_\varepsilon^-) = i(-\pi + \varepsilon) \to -i\pi$. Donc la fonction arg est discontinue au point $-r$; et comme $\arg(z) = \mathrm{Im}(\log(z))$, on en déduit que la fonction log est également discontinue au point $-r$. □

Proposition 4.12. *La fonction* arg *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, *et la fonction* log *est holomorphe sur* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ *avec* $\log'(z) = \frac{1}{z}$.

Démonstration. Si $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, alors $\theta := \arg(z) \in]-\pi, \pi[$. Donc $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est bien définie. D'après le théorème de l'angle au centre et de l'angle inscrit, on a

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{x + |z|} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\cdot$$

De plus, comme $\theta/2 \in]-\pi/2, \pi/2[$ on a $\theta/2 = \arctan(\tan\theta/2)$. Donc

$$\arg(z) = \theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

et cette formule explicite prouve que la fonction arg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$.

Comme $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$ et que la fonction $z \mapsto \log|z| = \log(\sqrt{x^2+y^2})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}^*$, la fonction log est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. De plus, en différentiant la relation $e^{\log} = z$, on obtient $e^{\log}d(\log) = dz$, autrement dit $zd(\log) = dz$, ou encore $d(\log) = \frac{dz}{z}$. Par conséquent, log est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ avec $\log'(z) = \frac{1}{z}$. □

Corollaire 4.13. *Pour tout nombre complexe z, on a* $e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Démonstration. Fixons $z \in \mathbb{C}$. Si l'entier n est assez grand, alors $1 + \frac{z}{n} \neq 0$ et on peut écrire $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp\left(n\log\left(1+\frac{z}{n}\right)\right)$. De plus, comme la fonction log est $\mathbb{C}$-dérivable en 1 avec $\log'(1) = 1$ et comme $\log(1) = 0$, on voit que $\log(1+u) \sim u$ quand $u \to 0$. Par conséquent, $n\log\left(1+\frac{z}{n}\right)$ tend vers z quand $n \to \infty$ et donc $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ tend vers e^z. □

Proposition 4.14. *Dans le disque unité $\mathbb{D} = D(0,1)$, on a*

$$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},$$

où la série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{D}$.

Démonstration. La série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n}$ a un rayon de convergence égal à 1, donc elle converge normalement sur tout compact de $D(0,1) = \mathbb{D}$.

Si $z \in \mathbb{D}$, alors $1 - z \in D(1,1) \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ (*faire un dessin*). Donc $f(z) = \log(1-z)$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{D}$, avec $f'(z) = -\frac{1}{1-z}$ et $f(0) = \log(1) = 0$. D'après le théorème fondamental de l'analyse (corollaire 2.8), on a donc

$$\log(1-z) = 0 - \int_0^1 \frac{1}{1-tz}\times z dt = -\int_0^1 \frac{z}{1-tz}dt$$

pour tout point $z \in \mathbb{D}$. De plus, pour $z \in \mathbb{D}$ fixé on a

$$\frac{1}{1-tz} = \sum_{k=0}^{\infty}(tz)^k,$$

où la série géométrique converge normalement sur $[0,1]$ car $|tz| \leqslant |z| < 1$ pour tout $t \in [0,1]$. On en déduit

$$\begin{aligned}\log(1-z) &= -\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{\infty}(tz)^k \times z\right)dt \\ &= -\sum\int \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1}\times\int_0^1 t^k\,dt \\ &= -\int_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{k+1},\end{aligned}$$

ce qui est la formule souhaitée. L'interversion de la somme infinie et de l'intégrale est justifiée par la convergence normale de la série sur $[0,1]$. □

Définition 4.15. *Soit $A \subset \mathbb{C}^*$. On dit qu'une fonction $L : A \to \mathbb{C}$ est une* ***détermination du logarithme sur*** *A si on a $e^{L(z)} = z$ pour tout $z \in A$, et qu'une fonction $\Theta = A \to \mathbb{R}$ est une* ***détermination de l'argument*** *si $\Theta(z)$ est un argument de z pour tout $z \in A$.*

Remarque 4.16. Il n'existe aucune détermination continue de l'argument sur le cercle $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ et aucune détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

Démonstration. Supposons qu'il existe une détermination continue de l'argument sur $\mathbb{T}$, i.e. une fonction continue $\Theta : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ telle que $e^{i\Theta(z)} = z$ pour tout $z \in \mathbb{T}$. On a alors $e^{i\Theta(e^{it})} = e^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, autrement dit $e^{i(\Theta(e^{it})-t)} = 1$. Donc la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \Theta(e^{it}) - t$ est à valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$. Comme φ est de plus continue, elle est donc *constante* d'après le théorème des valeurs intermédiaires ($\varphi(\mathbb{R})$ doit être un intervalle contenu dans $2\pi\mathbb{Z}$). Il existe donc un entier k tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}\ :\ \Theta(e^{it}) = t + 2k\pi\,,$$

ce qui est absurde car le membre de gauche est 2π-périodique mais le membre de droite ne l'est pas.

Si L est une détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$ alors $L(z) = \log|z| + i\Theta(z)$, où Θ est une détermination de l'argument. D'après ce qui précède, Θ ne peut pas être continue sur $\mathbb{C}^*$, donc L non plus puisque $\Theta(z) = \mathrm{Im}(L(z))$. □

Exercice. Montrer que si L est une détermination $\mathcal{C}^1$ du logarithme dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, alors L est holomorphe et $L'(z) = \frac{1}{z}\cdot$

Proposition 4.17. *Soit $I =]\alpha, \beta[$ un intervalle ouvert de longueur 2π, et soit $\Delta_I \subset \mathbb{C}$ la demi-droite $\mathbb{R}^+ e^{i\alpha}$. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\Delta_I$, on note $\arg_I(z)$ l'unique argument de z appartenant à l'intervalle I, et on pose $\log_I(z) = \log|z| + i\arg_I(z)$. Alors $\arg_I$ est une détermination $\mathcal{C}^1$ de l'argument dans $\mathbb{C}\backslash\Delta_I$, et $\log_I$ est une détermination holomorphe du logarithme. On dit que $\log_I$ et $\arg_I$ sont les déterminations du logarithme et de l'argument* ***obtenues en choisissant l'argument dans I****.*

Démonstration. On a $I =]\alpha, \alpha + 2\pi[$ puisque I est de longueur 2π. En faisant un dessin, on voit qu'un nombre complexe z appartient à $\mathbb{C}\backslash\Delta_I$ si et seulement si $ze^{-i(\pi+\alpha)} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ (en tournant d'un angle $-(\alpha+\pi)$, on passe de Δ_I à $\mathbb{R}^-$). Dans ce cas, on a $\arg(ze^{-i(\pi+\alpha)}) \in]-\pi, \pi[$ et donc $\arg(ze^{-i(\pi+\alpha)}) + (\pi+\alpha) \in]\alpha, \alpha+2\pi[= I$. Comme $\arg(ze^{-i(\pi+\alpha)}) + (\pi+\alpha)$ est un argument de z, on en déduit que $\arg_I(z) = \arg(ze^{-i(\pi+\alpha)}) + (\pi+\alpha)$ pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\Delta_I$. D'après la proposition 4.12, cela montre que $\arg_I$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et on en déduit comme plus haut que $\log_I$ est holomorphe avec $\log_I'(z) = \frac{1}{z}\cdot$ □

Remarque. Avec les notations de la proposition, on a $\arg_{]-\pi,\pi[} = \arg$ et $\log_{]-\pi,\pi[} = \log$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$.

Corollaire 4.18. *Pour toute demi-droite $\Delta \subset \mathbb{C}$ d'origine 0, on peut trouver une détermination $\mathcal{C}^1$ de l'argument et une détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C}\backslash\Delta$.*

Démonstration. Toute demi-droite Δ d'origine 0 est une Δ_I. □

Corollaire 4.19. *Pour tout nombre complexe $z_0 \neq 0$, il existe une détermination holomorphe du logarithme définie sur un voisinage V de z_0.*

Démonstration. Il suffit de choisir une demi-droite Δ d'origine 0 ne passant pas par z_0 (par exemple $\Delta = \mathbb{R}^- z_0$), et de poser $V = \mathbb{C} \backslash \Delta$. □

4.4. Fonctions puissances.

Définition 4.20. *Soit L une détermination holomorphe du logarithme sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^*$. La* ***détermination de z^λ associée à*** *L est la fonction $z \mapsto e^{\lambda L(z)}$. Autrement dit, si $z = re^{i\Theta(z)}$, où Θ est la détermination de l'argument associée à L, alors*

$$z^\lambda = r^\lambda e^{i\lambda\Theta(z)} .$$

Remarque. Il est important d'avoir compris que z^λ dépend de la détermination du logarithme considérée, autrement dit du *choix de l'argument.* Par exemple, si on veut calculer $(-1)^{1/3}$ en choisissant l'argument dans $]0, 2\pi[$, alors on trouve $(-1)^{1/3} = (e^{i\pi})^{1/3} = e^{i\pi/3}$; mais si on choisit l'argument dans $]2\pi, 4\pi[$, on trouve $(-1)^{1/3} = (e^{i3\pi})^{1/3} = e^{i\pi} = -1$.

On laisse en exercice la vérification des (importantes) propriétés suivantes.

(1) Si $\lambda = n \in \mathbb{N}^*$, alors $z^\lambda = \underbrace{z \times \cdots \times z}_{\text{n fois}} = \cdots z^n$, quelle que soit la détermination de l'argument choisie ; et $z^0 = 1$.
(2) Si on choisit l'argument dans $] - \pi, \pi[$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction z^λ (dont le domaine de définition est $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$) prolonge la fonction puissance x^λ usuelle (définie sur $]0, \infty[$).
(3) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $|z^\lambda| = |z|^\lambda$, quelle que soit la détermination de l'argument choisie.
(4) Si $\Omega = \mathbb{C} \backslash \Delta$ pour une demi-droite $\Delta \neq [0, \infty[$ et si on choisit l'argument dans un intervalle I contenant 0, alors $|x^\lambda| = x^{\mathrm{Re}(\lambda)}$ pour tout $x \in]0, \infty[$.

Chapitre 2

Intégrale curviligne

1. Définition et propriétés élémentaires

1.1. Vocabulaire.

DÉFINITION 1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Un* ***chemin dans*** Ω *est une application continue $\gamma : [a,b] \to \Omega$, où $[a,b]$ est intervalle compact de $\mathbb{R}$. On dit qu'un chemin $\gamma : [a,b] \to \Omega$ est* ***fermé*** *(ou encore que γ est un* ***lacet****) si on a $\gamma(b) = \gamma(a)$.*

On dit qu'un chemin γ est **de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux** si on peut subdiviser son intervalle de paramétrage $[a,b]$ en intervalles $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{N-1}, a_N]$ sur lesquels γ est de classe $\mathcal{C}^1$.

DÉFINITION 1.2. *Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'image Γ et si ω est une 1-forme différentielle continue sur un ouvert Ω contenant Γ, on définit l'****intégrale de*** ω ***sur*** γ *par la formule*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt\,.$$

Remarque 1. Cette définition a bien un sens car la fonction sous l'intégrale (qui est définie sauf en un nombre fini de points) est continue par morceaux sur $[a,b]$.

Remarque 2. Pour que l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$ ait un sens, il suffit en fait que ω soit définie et continue sur l'image Γ de γ.

PRATIQUE DU CALCUL.

(1) *Cas où ω s'écrit $Pdx + Qdy$.* En écrivant $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, on a $\omega(\gamma(t)) = P(x(t), y(t))\pi_1 + Q(x(t), y(t))\pi_2$ pour tout $t \in [a,b]$, où π_1 et π_2 sont les deux "applications linéaires coordonnées". Donc $\omega(\gamma(t))\gamma'(t) = P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)$, et on obtient

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_a^b P(x(t), y(t))\, x'(t)dt + \int_a^b Q(x(t), y(t))\, y'(t)dt\,.$$

Pour calculer $\int_\gamma Pdx + Qy$, on procède donc "mécaniquement" comme suit : on pose

$$x = x(t) \ \ , \ \ y = y(t) \ \ , \ \ dx = x'(t)dt \ \ , \ \ dy = y'(t)dt\,,$$

et on intègre entre a et b.

EXEMPLE 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et notons $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $P(x,y) = f(x)$. Soit également $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $v \in \mathbb{R}$. Si on note $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma(t) := t + iv = (t, v)$, alors

$$\int_\gamma Pdx = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Ainsi, l'intégrale des fonctions d'une variable est un cas particulier d'intégrale curviligne.

EXEMPLE 2. Soit $\Omega := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Soient aussi $R > 0$ et $\alpha \in [0, 2\pi]$, et soit $\gamma : [0, \alpha] \to \Omega$ le chemin défini par $\gamma(t) := (R\cos t, R\sin t)$. On a

$$\int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \alpha.$$

Démonstration. On écrit $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, donc $dx = -R\sin t\, dt$, $dy = R\cos t\, dt$ et $x^2 + y^2 = R^2$. Cela donne

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} &= \int_0^\alpha \frac{(-R\sin t) \times (-R\sin t\, dt)}{R^2} + \int_0^\alpha \frac{(R\cos t) \times (R\cos t\, dt)}{R^2} \\ &= \int_0^\alpha (\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = \alpha.\end{aligned}$$

□

Exercice. Soient $r : [a, b] \to]0, \infty[$ et $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ le chemin défini par

$$\gamma(t) := \big(r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t)\big)$$

Montrer que

$$\int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \theta(b) - \theta(a).$$

(2) *Cas où ω s'écrit $Adz + Bd\bar{z}$.* Dans ce cas, on a $\omega(\gamma(t)) = A(\gamma(t))I + B(\gamma(t))\bar{I}$ pour tout $t \in [a, b]$, où $I(h) = h$ et $\bar{I}(h) = \bar{h}$. Donc $\omega(\gamma(t))\gamma'(t) = A(\gamma(t)) \times \gamma'(t) + B(\gamma(t)) \times \overline{\gamma'(t)}$ et donc

$$\int_\gamma Adz + Bd\bar{z} = \int_a^b A(\gamma(t))\, \gamma'(t)dt + \int_a^b B(\gamma(t))\, \overline{\gamma'(t)}dt\,.$$

Ainsi, pour calculer $\int_\gamma Adz + Bd\bar{z}$, on pose

$$z = \gamma(t) \quad , \quad dz = \gamma'(t)dt \quad , \quad d\bar{z} = \overline{\gamma'(t)}\, dt,$$

et on intègre entre a et b.

EXEMPLE. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, et soit $\gamma_R : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ le chemin (fermé) défini par $\gamma(t) = a + Re^{it}$. Alors

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z - a} = 2i\pi\,.$$

Démonstration. On pose $z = Re^{it}$, $dz = iRe^{it}dt$, ce qui donne

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z - a} = \int_0^{2pi} \frac{iRe^{it}dt}{Re^{it}} = \int_0^2 \pi i\, dt = 2i\pi.$$

□

Exercice. Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\int_{\gamma^n} \frac{dz}{z}$, où $\gamma^n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ est défini par $\gamma^n(t) = e^{int}$.

1.2. Propriétés de l'intégrale curviligne. Dans ce qui suit, Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, et tous les chemins $\gamma : [a, b] \to \Omega$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

PROPOSITION 1.3. (additivité)
Soit $\gamma : [a, b] \to \Omega$ un chemin dans Ω, et soit $c \in [a, b]$. Alors

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_{|[a,c]}} \omega + \int_{\gamma_{|[c,b]}} \omega$$

pour toute 1-forme différentielle ω continue sur Ω.

Démonstration. C'est évident par définition de l'intégrale curviligne. □

Remarque. Un des intérêts de ce résultat est qu'il permet de se ramener à des chemins *de classe* $\mathcal{C}^1$.

PROPOSITION 1.4. (théorème fondamental de l'analyse)
Soit $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Pour tout chemin $\gamma : [a, b] \to \Omega$, on a

$$\int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) .$$

En particulier, $\int_\gamma dF$ ne dépend que des extrémités du chemin γ.

Démonstration. Supposons d'abord que γ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors la fonction $F \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $(F \circ \gamma)'(t) = dF(\gamma(t))\gamma'(t)$. On a donc

$$\int_\gamma dF = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\, dt = [F \circ \gamma]_a^b ,$$

ce qui est la formule souhaitée.

Dans le cas général, choisissons une subdivision $a = a_0 < a_1 \cdots < a_N = b$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que γ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$, pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$. D'après la proposition 1.3 et le "cas $\mathcal{C}^1$", on a

$$\begin{aligned}
\int_\gamma dF &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\gamma_{|[a_i,a_{i+1}]}} dF \\
&= \Big(F(\gamma_1) - F(\gamma_0)\Big) + \Big(F(\gamma_2) - F(\gamma_1)\Big) + \cdots + \Big(F(\gamma_N) - F(\gamma_{N-1})\Big) \\
&= F(\gamma(a_N)) - F(\gamma(a_0)) ,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

COROLLAIRE 1.5. *Si $\gamma : [a, b] \to \Omega$ est un chemin **fermé**, alors $\int_\gamma dF = 0$ pour toute fonction $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.*

Démonstration. C'est évident puisque $\gamma(b) = \gamma(a)$. □

DÉFINITION 1.6. (changement de paramètre)

(1) *Un **changement de paramètre** est une bijection continue $s : [a, b] \to [c, d]$ entre deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$.*

(2) *On dit que deux chemins $\gamma_1 : [a, b] \to \Omega$ et $\gamma_2 : [c, d] \to \Omega$ sont*
   - ***équivalents** s'il existe un changement de paramètre **croissant** $s : [a, b] \to [c, d]$ tel que $\gamma_1(t) = \gamma_2(s(t))$ pour tout $t \in [a, b]$;*

- ***anti-équivalents*** *s'il existe un changement de paramètre* ***décroissant*** *tel que* $\gamma_1 = \gamma_2 \circ s$.

Remarque. Intuitivement, deux chemins sont équivalents s'ils décrivent la même courbe, dans le même sens (mais peut-être pas à la même vitesse) ; et deux chemins sont anti-équivalents s'ils décrivent la même courbe "en sens contraire".

Exemples. (i) Les chemins $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ et $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}^*$ définis par $\gamma_1(t) = e^{it}$ et $\gamma_2(s) = e^{2is}$ sont équivalents.

(ii) Les chemins $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ et $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ définis par $\gamma_1(t) = e^{it}$ et $\gamma_2(t) = e^{-it}$ sont anti-équivalents.

(iii) Pour tout chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, on définit le **chemin inverse** $\check{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{C}$ par la formule $\check{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$. Alors γ et $\check{\gamma}$ sont anti-équivalents. Lorsque $[a, b] = [0, 1]$, on a $\check{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$.

Proposition 1.7. (invariance de l'intégrale par changement de paramètre)
Soient $\gamma_1 : [a, b] \to \Omega$ *et* $\gamma_2 : [c, d] \to \Omega$ *deux chemins dans* Ω.

(1) *Si* γ_1 *et* γ_2 *sont équivalents, alors* $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$ *pour toute* 1*-forme différentielle* ω *continue sur* Ω.

(2) *Si* γ_1 *et* γ_2 *sont anti-équivalents, alors* $\int_{\gamma_1} \omega = -\int_{\gamma_1} \omega$ *pour toute* 1*-forme* ω.

Démonstration. Soit $s : [a, b] \to [c, d]$ un changement de paramètre tel que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ s$, croisant dans le cas (1) et décroissant dans le cas (2). Soit également ω une 1-forme continue sur Ω.

Supposons d'abord que γ_1, γ_2 et s soient de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors $\gamma_1'(t) = \gamma_2'(s(t))s'(t)$ pour tout $t \in [a, b]$, et donc

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \omega &= \int_a^b \omega(\gamma_1(t))(s'(t)\gamma_2'(s(t)))\, dt \\ &= \int_a^b \omega(\gamma_2(s(t))\gamma_2'((s(t)) \times s'(t)dt \\ &= \int_{s(a)}^{s(b)} \omega(\gamma_2(s))\gamma'(s)\, ds\,,\end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variable $s = s(t)$. Dans le cas (1), s est croissant, donc $s(a) = c$ et $s(b) = d$, et donc $\int_{\gamma_1} \omega = \int_c^d \omega(\gamma_2(s))\gamma'(s)\, ds = \int_{\gamma_2} \omega$. Dans le cas (2), on a $s(a) = d$ et $s(b) = c$, donc $\int_{\gamma_1} \omega = \int_d^c \omega(\gamma_2(s))\gamma'(s)\, ds = -\int_c^d \omega(\gamma_2(s))\gamma'(s)\, ds = -\int_{\gamma_2} \omega$.

Si γ_1,γ_2 et s sont de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on se ramène au "cas $\mathcal{C}^1$" en subdivisant convenablement les intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$: plus précisément, on subdivise $[a, b]$ en intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ sur lesquels γ_1 et s sont de classe $\mathcal{C}^1$ et tels que γ_2 est $\mathcal{C}^1$ sur $s([a_i, a_{i+1}])$, et on utilise la proposition 1.3.

Le cas où le changement de paramètre s est seulement supposé continu est un peu plus délicat, et on l'admettra. □

Corollaire 1.8. *Si* γ *est un chemin dans* Ω, *alors* $\int_\gamma \omega = -\int_{\check{\gamma}} \omega$ *pour toute* 1*-forme* ω *continue sur* Ω.

EXERCICE 1.9. Soient $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \Omega$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \Omega$ deux chemins de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Le chemin **"γ_1 suivi de γ_2"** est le chemin $\gamma : [0,1] \to \Omega$ défini par

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1\big(a_1 + (b_1 - a_1) \times 2t\big) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \gamma_2\big(a_2 + (b_2 - a_2) \times (2t-1)\big) & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Vérifier que cette définition a bien un sens, et que pour toute 1-forme différentielle ω continue sur Ω, on a

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega.$$

1.3. Courbes simples.

DÉFINITION 1.10. *Une* ***courbe simple*** *dans le plan est un compact $\Gamma \subset \mathbb{C}$ qui est l'image d'un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$* ***injectif*** *(on dit encore* ***sans point double****), avec un intervalle $[a,b]$ non réduit à point. On dit alors que γ est un* ***paramétrage*** *de la courbe Γ.*

Remarque. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est une application continue et injective, alors γ est un **homéomorphisme** de $[a,b]$ sur $\gamma([a,b])$, par compacité de $[a,b]$. Donc, toute courbe simple $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est homéomorphe à l'intervalle $[0,1]$. En particulier, Γ possède deux **extrémités** p et q, qui correspondent aux extrémités 0 et 1 de $[0,1]$. On peut les caractériser de la façon suivante : ce sont les deux seuls points de Γ tels que $\Gamma\backslash\{p\}$ et $\Gamma\backslash\{q\}$ sont *connexes*.

DÉFINITION 1.11. *Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe simple d'extrémités p et q. On dit qu'on a* ***orienté*** *Γ si on a choisi un "sens de parcours" sur Γ : de p vers q, ou de q vers p. Il y a donc exactement 2 manières d'orienter Γ.*

Remarque. Tout paramétrage $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de Γ définit une orientation de Γ ("de $\gamma(a)$ vers $\gamma(b)$").

LEMME 1.12. *Soient γ_1 et γ_2 deux paramétrages d'une même courbe simple $\Gamma \subset \mathbb{C}$.*

(1) *Si γ_1 et γ_2 définisent la même orientation de Γ, alors γ_1 et γ_2 sont équivalents.*

(2) *Si γ_1 et γ_2 définisent des orientations inverses, alors ils sont anti-équivalents.*

Démonstration. En notant $[a,b]$ et $[c,d]$ les intervalles de définition de γ_1 et γ_2, on sait que $\gamma_1 : [a,b] \to \Gamma$ et $\gamma_2 : [c,d] \to \Gamma$ sont des homéomorphismes. Donc l'application $s = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 : [a,b] \to [c,d]$ est un changement de paramètre tel que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ s$. Si γ_1 et γ_2 définissent la même orientation de Γ, alors $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$ et $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$, donc $s(a) = c$ et $s(b) = d$, et s est croissant. Si γ_1 et γ_2 définissent des orientations inverses, alors $\gamma_1(a) = \gamma_2(d)$ et $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, donc $s(a) = d$ et $s(b) = c$, et s est décroissant. $\square$

Ce lemme rend légitime la définition suivante.

DÉFINITION 1.13. *Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe simple* ***orientée****. Si ω est une 1-forme différentielle continue au voisinage de Γ, on définit l'intégrale de ω* sur Γ *par $\int_\Gamma \omega = \int_\gamma \omega$, où $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est n'importe quel paramétrage de Γ compatible avec l'orientation.*

Exemple. (segments orientés)

(1) Si $p, q \in \mathbb{C}$, on notera $[p, q] \subset \mathbb{C}$ le segment d'extrémités p et q, et $[pq]$ (sans la virgule) le segment $[p, q]$ orienté de p vers q. On a alors
$$\int_{[pq]} \omega = -\int_{[qp]} \omega$$
pour toute 1-forme différentielle ω continue au voisinage de $[p, q]$.

(2) On peut paramétrer un segment orienté $[pq]$ par le chemin $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = p + t(q - p) = (1 - t)p + tq$. Le chemin inverse $\check{\gamma}(t) = tp + (1 - t)q$ paramètre le segment orienté $[qp]$.

(3) Si $[p, q]$ est un segment horizontal de la forme $[a, b] \times \{v\}$, il est plus naturel de paramétrer $[pq]$ directement par l'intervalle $[a, b]$, i.e. de poser $\gamma(x) = (x, v)$, $x \in [a, b]$. Si $\omega = Pdx + Qdy$ est une forme différentielle continue au voisinage de $[p, q]$, on a alors
$$\int_{[pq]} Pdx + Qdy = \int_a^b P(x, v)\, dx \quad \text{et} \quad \int_{[qp]} Pdx + Qdy = -\int_a^b P(x, v)\, dx\,.$$
De même, si $[p, q]$ est un segment vertical $\{u\} \times [c, d]$ alors $[pq]$ se paramètre par $\gamma(y) = (u, y)$, $y \in [a, b]$, et donc
$$\int_{[pq]} Pdx + Qdy = \int_c^d Q(u, y)dy \quad \text{et} \quad \int_{[qp]} Pdx + Qdy = -\int_c^d Q(u, y)dy\,.$$

(4) Si $\xi \in \mathbb{C}$, alors le segment orienté $[0\xi]$ se paramètre par $\gamma(t) = t\xi$, $t \in [0, 1]$.

1.4. Longueur d'un chemin.

DÉFINITION 1.14. *Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. La **longueur** de γ est le nombre $l(\gamma)$ défini par $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$.*

Exemples. (1) Soient $p, q \in \mathbb{C}$ et soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ le paramétrage naturel du segment $[p, q]$, i.e. $\gamma(t) = (1 - t)p + tq = p + t(q - p)$. On a $\gamma'(t) = q - p$ pour tout $t \in [0, 1]$, donc $l(\gamma) = \int_0^1 |q - p|\, dt = |q - p|$, ce qui est bien la valeur attendue pour la longueur de $[p, q]$.

(2) Soient $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Le chemin $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = a + Re^{it}$ paramètre le cercle $\{z \in \mathbb{C};\ |z - a| = R\}$, donc on s'attend à trouver $l(\gamma) = 2\pi R$. Et de fait, on a $|\gamma'(t)| = iRe^{it}$ pour tout $t \in [0, 1]$, donc $|\gamma'(t)| = R$ et $l(\gamma) = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R$.

PROPOSITION 1.15. *Deux chemins équivalents ou anti-équivalents ont la même longueur.*

Démonstration. Soient $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$ deux chemins équivalents ou anti-équivalents, et soit $s : [a, b] \to [c, d]$ un changement de paramètre tel que $\gamma_1(t) = \gamma_2(s(t))$.

Si s est de classe $\mathcal{C}^1$ (ou $\mathcal{C}^1$ par morceaux), on peut montrer que $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$ en utilisant la formule de changement de variable, exactement comme dans la preuve de la proposition 1.7 : c'est un bon exercice.

Pour un changement de paramètre seulement continu, on doit procéder différemment. Tout repose sur le fait suivant, que l'on admettra :

Fait. Soit $[u, v]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Appelons *subdivision* de $[u, v]$ toute suite finie de la forme $\bar{t} = (t_0, t_1, \dots, t_N)$, avec ou bien $u = t_0 < t_1 < \dots < t_N = v$ ou bien $v = t_0 > t_1 > \dots > t_N = u$. Soit également $\gamma : [u, v] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Pour toute subdivision $\bar{t} = (t_0, t_1, \dots, t_N)$ de $[u, v]$, posons

$$l(\gamma, \bar{t}) = \sum_{i=0}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \, .$$

Avec ces notations, on a $l(\gamma) = \sup \{l(\gamma, \bar{t});\ \bar{t} \text{ subdivision de } [u, v]\}$.

En admettant ce fait, la preuve de la proposition est immédiate. En effet, quand $\bar{t} = (t_0, \dots, t_N)$ décrit l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$, alors $s\bar{t} := (s(t_0), \dots, s(t_N))$ décrit l'ensemble des subdivisions de $[c, d]$ car s est une bijection strictement monotone de $[a, b]$ sur $[c, d]$, et on a $l(\gamma_1, \bar{t}) = l(\gamma_2, s\bar{t})$ pour toute subdivision $\bar{t}$; donc la formule précédente donne directement $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$. □

Exercice. Essayer de donner une preuve de la proposition 1.7 en s'inspirant de la démonstration précédente.

Corollaire 1.16. *On peut définir la longueur d'une* ***courbe*** *(simple)* $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *: c'est la longueur de n'importe quel paramétrage de* Γ.

Exercice. Calculer la longueur de l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ joignant les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Notation. Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, d'image Γ. Pour toute fonction continue φ définie sur Γ, on posera

$$\int_\gamma \varphi(z)| \, |dz| = \int_a^b = \varphi(\gamma(t)) \, |\gamma'(t)| \, dt \, .$$

En particulier, on a $l(\gamma) = \int_\gamma \mathbf{1} \, |dz| = \int_\gamma |dz|$.

La notation est utile lorsqu'on veut majorer le module d'une intégrale curviligne : c'est le contenu du lemme suivant.

Lemme 1.17. *Soit* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *un chemin de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux d'image* Γ. *Si* f *est une fonction continue sur un ouvert contenant* Γ*, alors*

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leqslant \int_\gamma |f(z)| \, |dz| \leqslant l(\gamma) \times \sup_{z \in \Gamma} |f(z)| \, .$$

Démonstration. Il suffit d'écrire $\int f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ et de majorer le module de l'intégrale par l'intégrale du module.

□

2. La formule de Green-Riemann

Le but de cette section est d'établir une "formule magique" sur laquelle sera basée toute la théorie des fonctions holomorphes.

2.1. Domaines élémentaires.

DÉFINITION 2.1. *On dit qu'un compact* $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *est une* ***courbe de Jordan fermée*** *si* Γ *est l'image d'un chemin* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *fermé et "sans points doubles", i.e. tel que* $\gamma_{|[a,b[}$ *est injectif.*

Par exemple : un cercle, le bord d'un triangle, le bord d'un rectangle sont des courbes de Jordan fermées.

Exercice. Montrer qu'un compact Γ est une courbe de Jordan fermée si et seulement si Γ est homéomorphe au cercle $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$.

DÉFINITION 2.2. *On dit qu'un compact* $K \subset \mathbb{C}$ *est un* ***domaine élémentaire*** *si les conditions suivantes sont satisfaites.*

(1) *K est l'adhérence de son intérieur, et sa frontière ∂K est réunion d'un nombre fini de courbes de Jordan fermés deux-à-deux disjointes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$.*
(2) *Chaque courbe Γ_j admet un paramétrage γ_j possédant les propriétés suivantes :*
    (a) *γ_j est de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux, et $\gamma_j'(t) \neq 0$ en tout point de dérivabilité ;*
    (b) *lorsqu'on parcourt Γ_j en suivant le paramétrage γ_j, on a constamment l'intérieur du domaine K "à sa gauche".*

Remarque 1. La signification précise de (2) est la suivante. Soit $[a_j, b_j]$ l'intervalle de définition de γ_j. En tout point $t \in]a_j, b_j[$ où γ_j est dérivable, notons $\mathbf{n}_j(t)$ le vecteur unitaire orthogonal à $\gamma_j'(t)$ tel que $(\gamma_j'(t), \mathbf{n}_j(t))$ soit orienté dans le sens direct. Alors $\mathbf{n}_j(t)$ "pointe vers l'intérieur de K" : on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $]\gamma_j(t), \gamma_j(t) + \varepsilon\, \mathbf{n}_j(t)] \subset \mathring{K}$ et $[\gamma_j(t) - \varepsilon\, \mathbf{n}_j(t), \gamma_j(t)[\cap K = \varnothing$.

Remarque 2. Si γ_j vérifie (2), on dira que γ_j est un **paramétrage admissible** de Γ_j ; et si $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ vérifient tous (2), on dira que $(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ est un paramétrage admissible *de* ∂K.

Exemple 1. Un disque fermé, un rectangle fermé, un triangle fermé sont des domaines élémentaires. Dans chaque cas, un paramétrage admissible de ∂K fait parcourir ∂K dans le sens trigonométrique.

Exemple 2. Si $a \in \mathbb{C}$ et si r et R vérifient $0 < r < R$, alors la **couronne fermée** $K = \overline{D}(a,R) \backslash D(a,r) = \{z \in \mathbb{C};\ r \leqslant |z-a| \leqslant R\}$ est un domaine élémentaire, avec $\partial K = \partial D(a,R) \cup \partial D(a,r)$. Un paramétrage admissible de ∂K fait parcourir le "grand" cercle $\partial D(a,R)$ dans le sens trigonométrique, et le "petit" cercle $\partial D(a,r)$ dans le sens anti-trigonométrique.

Exemple 3. Plus généralement, si $D, D_1, \dots, D_n$ sont des disques ouverts tels que $\overline{D}_j \subset D$ pour tout j et les $\overline{D}_j$ sont deux à deux disjoints, alors le "disque à trous" $K = \overline{D} \backslash (D_1 \cup \cdots \cup D_n)$ est un domaine élémentaire, avec $\partial K = \partial D \cup \bigcup_1^n \partial D_j$. Le grand cercle ∂D doit être orienté dans le sens trigonométrique, et les petits cercles ∂D_j dans le sens anti-trigonométrique.

LEMME 2.3. *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un domaine élémentaire de frontière $\partial K = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_N$, et soit ω une 1-forme différentielle continue sur un ouvert contenant K. Pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, l'intégrale $\int_{\gamma_j} \omega$ est indépendante du paramétrage admissible γ_j de Γ_j.*

Preuve abrégée. Fixons $j \in \{1, \dots, N\}$. Il s'agit de montrer que si $\gamma^1 : [a^1, b^1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma^2 : [a^2, b^2] \to \mathbb{C}$ sont deux paramétrages admissibles de Γ_j, alors $\int_{\gamma^1} \omega = \int_{\gamma^2} \omega$.

Pour ne pas perdre de temps, on *admettra* qu'on peut se ramener au cas où γ^1 et γ^2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ et ont le même point de départ (i.e. $\gamma^1(a^1) = \gamma^2(a^2)$), et que dans ce cas il existe un changement de paramètre $s : [a^1, b^1] \to [a^2, b^2]$ tel que $\gamma^1 = \gamma^2 \circ s$. Il reste à voir que ce changement de paramètre est *croissant*, car on pourra alors conclure que γ^1 et γ^2 sont équivalents et appliquer la proposition 1.7.

Le point clé est que le changement de paramètre s (*a priori* seulement continu) est dérivable en tout point $t \in]a^1, b^1[$. Pour le voir, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^1(t+h) - \gamma^1 1(t)}{h} &= \frac{\gamma^2(s(t+h)) - \gamma^2(s(t))}{h} \\ &= \frac{\gamma^2(s(t+h)) - \gamma^2(s(t))}{s(t+h) - s(t)} \times \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \,. \end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, le membre de gauche tend vers $(\gamma^1)'(t)$, et $\frac{\gamma^2(s(t+h)) - \gamma^2(s(t))}{s(t+h)-s(t)}$ tend vers $(\gamma^2)'(s(t))$ car $s(t+h)$ tend vers $s(t)$ par continuité de s. Comme $(\gamma^2)'(s(t)) \neq 0$ (par définition d'un paramétrage admissible), on en déduit que $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ tend vers $\frac{(\gamma^1)'(t)}{(\gamma^2)'(s(t))}$, et donc que s est dérivable au point t.

Maintenant qu'on sait que s est dérivable, on peut écrire

$$(\gamma^1)'(t) = s'(t) \times (\gamma^2)'(s(t)). \tag{2.1}$$

Cette identité montre que pour tout point $t \in]a^1, b^1[$, les vecteurs $(\gamma^1)'(t)$ et $(\gamma^2)'(s(t))$ sont colinéaires, et donc que les vecteurs "normaux" $\mathbf{n}_{\gamma^1}(t)$ et $\mathbf{n}_{\gamma^2}(s(t))$ le sont également. Comme ces deux vecteurs (attachés au même point $\xi = \gamma^1(t) = \gamma^2(s(t))$ de Γ_j pointent tous les deux vers l'intérieur de K par définition d'un paramétrage admissible, ils sont nécessairement *de même sens*. Par conséquent, $(\gamma^1)'(t)$ et $(\gamma^2)'(s(t))$ sont eux aussi de même sens, et en revenant à (2.1) on en conclut que $s'(t) \geqslant 0$, pour tout $t \in]a^1, b^1[$. Ainsi, le changement de paramètre s est croissant, ce qui achève la démonstration.

□

DÉFINITION 2.4. *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un domaine élémentaire. Si ω est une 1-forme différentielle continue sur un ouvert contenant K, on définit l'**intégrale de ω sur ∂K** par la formule*

$$\int_{\partial K} \omega = \sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_j} \omega \,,$$

où $(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ est n'importe quel paramétrage admissible de ∂K.

Remarque. Comme K est l'adhérence de son intérieur, on a $\partial K = \partial(\mathring{K})$, donc on peut écrire $\int_{\partial(\mathring{K})}$ au lieu de $\int_{\partial K}$. On le fera systématiquement lorsque K est un disque fermé $\overline{D}$; autrement dit, on écrira toujours $\int_{\partial D}$ au lieu de $\int_{\partial \overline{D}}$.

Exemple 1. Si $D = D(a, r)$ est un disque ouvert et si ω est de la forme $f dz$, alors

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, ire^{it}\, dt \,.$$

Exemple 2. Soit R un rectangle $[a,b]\times[c,d]$. Notons A,B,C,D les sommets de R, en commençant par le sommet inférieur gauche $A=(a,c)$ et en "tournant dans le sens trigonométrique". On obtient un paramétrage admissible de ∂R en "mettant bout à bout" des paramétrages des segments orientés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Si $\omega = Pdx+Qdy$, on obtient donc (d'après la propriété d'additivité)

$$\begin{aligned}\int_{\partial R} Pdx+Qdy &= \int_{[AB]} + \int_{[BC]} + \int_{[CD]} + \int_{[DA]} \\ &= \int_a^b P(x,c)\,dx + \int_c^d Q(b,y)\,dy - \int_a^b P(x,d)\,dx - \int_c^d Q(a,y)\,dy\,.\end{aligned}$$

Exemple 3. Si K est un"disque à trous", $K=\overline{D}\setminus\bigcup_1^n D_j$, alors (compte tenu des conventions d'orientation)

$$\int_{\partial K}\omega = \int_{\partial D}\omega - \sum_{j=1}^{n}\int_{\partial D_j}\omega\,.$$

2.2. La formule. On peut maintenant énoncer la formule de Green-Riemann.

THÉORÈME 2.5. (formule de Green-Riemann)
Soit $K\subset\mathbb{C}$ un domaine élémentaire. Si $\omega = Pdx+Qdy$ est une 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert contenant K, alors

$$\int_{\partial K} Pdx+Qdy = \int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,.$$

Remarque. Si $\omega = Adz + Bd\bar{z}$, alors la formule de Green-Riemann s'écrit

$$\int_{\partial K} Adz + Bd\bar{z} = -2i\int_K \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}\right) dxdy\,.$$

Démonstration. Comme $dz = dx+idy$ et $d\bar{z} = dx - idy$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} Adz + Bd\bar{z} &= \int_{\partial K}(Adx+iAdy) + \int_{\partial K} Bdx - iBdy \\ &= \int_K \left(i\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dxdy + \int_K\left(-i\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y}\right) dxdy \\ &= 2i\int_K \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) dxdy.\end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 2.6. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un domaine élémentaire K, alors*

$$\int_{\partial K} A\,dz = 2i\int_K \frac{\partial A}{\partial\bar{z}}\,dxdy\,.$$

La preuve de la formule de Green-Riemann va se faire en considérant plusieurs cas, de plus en plus généraux. Pour plus de "lisibilité", on s'abstiendra de démontrer en détail certains points techniques.

CAS 1. Le domaine K est un rectangle $[a,b]\times[c,d]$.

Dans ce cas, c'est un calcul assez facile, mais cependant non-trivial et en fait très instructif :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} Pdx + Qdy &= \int_a^b P(x,c)\,dx + \int_c^d Q(b,y)\,dy - \int_a^b P(x,d)\,dx - \int_c^d Q(a,y)\,dy \\
&= \int_c^d \Big[Q(b,y) - Q(a,y)\Big]dy - \int_a^b \Big[P(x,d) - P(x,c)\Big]dx \\
& \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx\right)dy - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\right)dx \\
&= \int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\,,
\end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème fondamental de l'analyse et le théorème de Fubini.

Cas 2. Le domaine K est un “rectangle déformé”.

De façon précise, supposons que K soit de la forme $K = \Phi(R)$, où $R = [a,b]\times[c,d]$ est un rectangle et Φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ d'un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ contenant R sur un ouvert $U' \subset \mathbb{C}$. On va se ramener au cas 1 au prix de quelques calculs et à l'aide de la **formule de changement de variables**.

Comme le rectangle R est connexe, on peut supposer que U est connexe, quitte à remplacer U par la composante connexe de U contenant R. Comme Φ est un difféomorphisme, le déterminant jacobien J_Φ ne s'annule pas, et garde donc un signe constant sur U par connexité (et par continuité de J_Φ). Quitte à remplacer R par $R^* = [c,d]\times[a,b]$ et Φ par le difféomorphisme Φ^* défini par $\Phi^*(u,v) = \Phi(v,u)$ (qui vérifie $J_{\Phi^*}(u,v) = -J_\Phi(v,u)$, on peut supposer qu'on a $J_\Phi(u,v) > 0$ pour tout $(u,v) \in U$.

La condition $J_\Phi(u,v) > 0$ signifie que le difféomorphime Φ “préserve l'orientation en tout point”. Cela rend plausible fait suivant, que l'on admettra car sa preuve n'est pas particulièrement éclairante.

Fait. Si γ est un paramétrage admissible de ∂R, alors $\Phi\circ\gamma$ est un paramétrage admissible de ∂K.

On va se contenter d'établir la formule de Green-Riemann dans le cas d'une forme différentielle du type $\omega = Pdx$, où P est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. (Le cas $\omega = Qdy$ se traite de la même façon, et le cas général s'obtient en faisant la somme de ces deux cas particuliers). Il s'agit donc de vérifier qu'on a

$$\int_{\partial K} P\,dx = -\int_K \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy\,.$$

Dans la suite, on écrira

$$\Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v))\,.$$

Avec ces notations, le déterminant jacobien J_Φ est donné par la formule

$$J_\Phi = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\,,$$

ce qui servira plus bas.

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un paramétrage admissible de ∂R. D'après le fait, on a

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} P\,dx &= \int_{\Phi\circ\gamma} P\,dx \\ &= \int_a^b P(\Phi\circ\gamma(t))\,(X\circ\gamma)'(t)\,dt \\ &= \int_a^b (P\circ\Phi)(\gamma(t))\,dX(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_\gamma (P\circ\Phi)\,dX\,.\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} P\,dx &= \int_{\partial R} (P\circ\Phi)\,dX \\ &= \int_{\partial R} (P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial u}\,du + (P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial v}\,dv\,.\end{aligned}$$

D'après le cas 1 et comme la forme différentielle $(P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial u}du + (P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial v}dv$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (car P est $\mathcal{C}^1$ et X est $\mathcal{C}^2$), on a donc

$$\int_{\partial K} P\,dx = \int_R \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left((P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left((P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial u}\right)\right\} dudv\,. \tag{2.2}$$

Il s'agit maintenant de montrer que le membre de droite est égal à $-\int_{\partial K} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$, ce qui n'est pas immédiatement apparent !

D'après les formules pour les dérivées partielles d'une fonction composée, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left((P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial v}\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(P(X,Y)\,\frac{\partial X}{\partial v}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\,(P(X,Y))\,\frac{\partial X}{\partial v} + P(X,Y)\,\frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}(X,Y)\,\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}(X,Y)\,\frac{\partial Y}{\partial u}\right)\frac{\partial X}{\partial v} + P(X,Y)\,\frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v}\,;\end{aligned}$$

et de même :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left((P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}(X,Y)\,\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}(X,Y)\,\frac{\partial Y}{\partial v}\right)\frac{\partial X}{\partial u} + P(X,Y)\,\frac{\partial^2 X}{\partial v\partial u}\cdot$$

Comme $\frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2 X}{\partial v\partial u}$ d'après le théorème de Schwarz, on obtient donc, après simplification :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left((P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left((P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial u}\right) &= \frac{\partial P}{\partial y}(X,Y)\times\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right) \\ &= -\left(\frac{\partial P}{\partial y}\circ\Phi\right)\,J_\Phi\,.\end{aligned}$$

Comme de plus $J_\Phi = |J_\Phi|$ puisqu'on suppose depuis le début que $J_\Phi > 0$, on peut alors conclure en revenant à (2.2) et en utilisant la formule de changement de variable :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} P\,dx &= -\int_R \frac{\partial P}{\partial y}(\Phi(u,v))\,|J_\Phi(u,v)|\,dudv \\
&= -\int_{\Phi(R)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy \\
&= -\int_K \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy\,.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la formule de Green-Riemann dans le cas d'un “rectangle déformé”.

CAS 3. Le domaine K peut se “quadriller” par des rectangles déformés.

De façon précise, on suppose qu'on peut décomposer K sous la forme

$$K = K_1 \cup \cdots \cup K_N\,,$$

où les K_j sont des rectangles déformés et, pour tous $j, j' \in \{1, \ldots, N\}$, ou bien $K_j \cap K_{j'} = \emptyset$, ou bien K_j et $K_{j'}$ se rencontrent selon un “côté” commun. *Un dessin est indispensable ici !*

Dans ce cas, on il n'est pas très difficile de montrer que toutes les intersections $K_j \cap K_{j'}$ sont de mesure de Lebesgue nulle, car ce sont des réunions finies de courbes de classe $\mathcal{C}^1$. On a donc

$$\int_K f(x,y)\,dxdy = \sum_{j=1}^N \int_{K_j} f(x,y)\,dxdy$$

pour toute fonction f continue sur K.

D'autre part, si deux rectangles déformés K_j et $K_{j'}$ se rencontrent selon un “côté” commun $\Gamma_{j,j'}$, on voit que $\Gamma_{j,j'}$ est parcouru en sens inverse selon qu'on parcourt ∂K_j ou $\partial K_{j'}$. Par conséquent, si ω est une forme différentielle continue au voisinage de K, alors les deux intégrales sur $\Gamma_{j,j'}$ se détruisent lorsqu'on calcule $\int_{K_j} \omega + \int_{K_{j'}} \omega$. Ceci étant vrai pour tous j, j', il est alors facile de se convaincre qu'on a

$$\sum_{j=1}^N \int_{\partial K_j} \omega = \int_{\partial K} \omega\,,$$

pour toute forme différentielle ω continue au voisinage de K.

D'après le cas 2, on en déduit immédiatement le résultat souhaité : si $\omega = Pdx + Qdy$, alors

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} \omega &= \sum_{j=1}^N \int_{\partial K_j} \omega \\
&= \sum_{j=1}^N \int_{K_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \\
&= \int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,.
\end{aligned}$$

CAS 4. Le domaine K est quelconque.

On peut montrer, et on l'admettra, que *tout* domaine élémentaire $K \subset \mathbb{C}$ admet un quadrillage par rectangles déformés. Donc le cas général est en fait le cas 3, et la démonstration est terminée.

2.3. Un cas particulier. Dans cette sous-section, on va donner une preuve directe de la formule de Green-Riemann dans le cas où le domaine K est un *disque* $\overline{D}(a, R)$. C'est un calcul suffisamment intéressant pour être détaillé. On se contente de faire la preuve pour une forme différentielle du type $\omega = Pdx$.

Écrivons $a = (x_0, y_0)$. Le bord de K se paramètre par le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par

$$\gamma(\theta) := a + Re^{i\theta} = (x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta).$$

Donc

$$\int_{\partial K} Pdx = \int_0^{2\pi} P(x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta) \times (-R\sin\theta d\theta).$$

En notant $P^* : [0, R] \times [0, 2\pi]$ la fonction définie par

$$P^*(r, \theta) := P(x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta),$$

on a donc

$$\int_{\partial K} Pdx = -\int_0^{2\pi} RP^*(R, \theta)\sin\theta\, d\theta.$$

Ensuite, on a pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} RP^*(R, \theta) &= RP^*(R, \theta) - 0P^*(0, \theta) \\ &= \int_0^R \frac{d}{dr}\big(rP^*(r, \theta)\big)\, dr \\ &= \int_0^R \left(r\frac{\partial P^*}{\partial r}(r, \theta) + P^*(r, \theta)\right) drd\theta \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\partial K} Pdx = -\int_0^{2\pi}\int_0^R \left(r\frac{\partial P^*}{\partial r}(r, \theta) + P^*(r, \theta)\right)\sin\theta\, drd\theta.$$

Enfin, par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\int_0^R P^*(r, \theta)\sin\theta\, drd\theta &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} P^*(r, \theta)\sin\theta\, d\theta\right) dr \\ &= \int_0^R \left(\Big[\cos\theta P^*(r, \theta)\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos\theta\, \frac{\partial P^*}{\partial\theta}(r, \theta)\right) dr \\ &= -\int_0^R\int_0^{2\pi} \cos\theta\, \frac{\partial P^*}{\partial\theta}(r, \theta)\, dr. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} Pdx &= -\int_0^R\int_0^{2\pi} \left(r\sin\theta\, \frac{\partial P^*}{\partial r}(r, \theta) + \cos\theta\, \frac{\partial P^*}{\partial\theta}(r, \theta)\, dr\right) d\theta dr \\ &= -\int_{]0,R[\times[0,2\pi]} \left(\sin\theta\, \frac{\partial P^*}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos\theta}{r}\, \frac{\partial P^*}{\partial\theta}(r, \theta)\, dr\right) rdrd\theta \end{aligned}$$

Mais d'après les formules de dérivation partielle "en coordonnées polaires", on a pour tout $(r,\theta)\in]0,R[\times[0,2\pi]$:

$$\sin\theta\,\frac{\partial P^*}{\partial r}(r,\theta)+\frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial P^*}{\partial\theta}(r,\theta)=\frac{\partial P}{\partial y}(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta).$$

D'où finalement

$$\begin{aligned}\int_{\partial D(a,r)}Pdx&=-\int_{]0,R[\times[0,2\pi]}\frac{\partial P}{\partial y}(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\,rdrd\theta\\&=-\int_{D(a,r)}\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy,\end{aligned}$$

d'après la formule de changement de variables.

3. Applications aux fonctions holomorphes

3.1. Préambule : "convergence dominée". On aura très souvent l'occasion de "passer à la limite" sous des intégrales $\int_I f_\lambda(t)\,dt$ dépendant d'un paramètre λ. Pour cela, on utilisera systématiquement la version suivante du *théorème de convergence dominée*.

Théorème de convergence dominée. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I\to\mathbb{C}$ une fonction intégrable et soit $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de fonctions intégrables ($f_\lambda : I\to\mathbb{C}$) avec un ensemble d'indices $\Lambda\subset\mathbb{R}$. Enfin, soit $\lambda_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ un "point d'accumulation" de Λ. On fait les hypothèses suivantes.*

(i) *$f_\lambda(t)\to f(t)$ quand $\lambda\to\lambda_0$, pour tout $t\in I$ sauf peut-être un nombre fini.*

(ii) Hypothèse de domination. *il existe une fonction mesurable $g : I\to\mathbb{R}^+$* ***indépendante de*** *$\lambda\in\Lambda$ telle que $\forall\lambda\in\Lambda$: $|f_\lambda(t)|\leqslant g(t)$ et $\int_I g(t)\,dt<\infty$.*

Alors on peut conclure que $\int_I f(t)\,dt=\lim_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda(t)\,dt$.

Remarque 1. Lorsque l'intervalle I est **borné**, l'hypothèse de domination (ii) est satisfaite s'il existe une **constante** M indépendante de λ telle que $|f_\lambda(t)|\leqslant M$ pour tout λ et pour tout $t\in I$.

Remarque 2. On en déduit que si I est un intervalle compact $[a,b]$, si les f_λ sont continues et si $f_\lambda(t)\to f(t)$ **uniformément** sur $[a,b]$ quand $\lambda\to\lambda_0$, alors on peut passer à la limite sous l'intégrale. En particulier, si $\sum u_k$ est une série de fonctions qui converge **normalement** sur $[a,b]$, alors les sommes partielles $f_n=\sum_0^n u_k$ convergent uniformément sur $[a,b]$, et on obtient donc

$$\int_a^b\left(\sum_{k=0}^\infty u_k(t)\right)dt=\sum_{k=0}^\infty\int_a^b u_k(t)\,dt\,.$$

Exercice. Démontrer directement ce qui est dit dans la remarque 2, sans utiliser le théorème de convergence dominée.

On appliquera très souvent le théorème de convergence dominée à des intégrales curvilignes, sous la forme suivante.

Corollaire 3.1. *Soit $\gamma : [a,b]\to\mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'image Γ, soit $\varphi : \Gamma\to\mathbb{C}$ une fonction continue, et soit $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de fonctions continues sur Γ. On suppose que $\varphi_\lambda(z)\to\varphi(z)$ pour tout $z\in\Gamma$ (quand $\lambda\to\lambda_0$) et qu'il existe une constante M telle que $|\varphi_\lambda(z)|\leqslant M$ pour tout $z\in\Gamma$ et pour tout $\lambda\in\Lambda$. Alors on peut conclure que $\int_\gamma\varphi_\lambda(z)\,dz$ tend vers $\int_\gamma\varphi(z)\,dz$.*

Démonstration. C'est immédiat en écrivant la définition des intégrales curvilignes : comme on intègre sur l'intervalle borné $[a, b]$, on peut utiliser la remarque 1. □

3.2. Le "théorème de Cauchy". Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la formule de Green-Riemann.

THÉORÈME 3.2. (théorème de Cauchy)
Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors $\int_{\partial K} f(z)\, dz = 0$ pour tout domaine élémentaire $K \subset \Omega$.

Démonstration. D'après la formule de Green-Riemann, on a

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 2i \int_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, dxdy\,,$$

d'où le résultat puisque $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. □

COROLLAIRE 3.3. *Si $K \subset \mathbb{C}$ est un domaine élémentaire, alors*

$$\forall a \in \mathbb{C}\backslash K \ : \ \int_{\partial K} \frac{dz}{z-a} = 0\,.$$

Démonstration. On applique le théorème de Cauchy à $f(z) = \frac{1}{z-a}$, qui est holomorphes sur $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{a\}$, ouvert de $\mathbb{C}$ contenant K. □

Remarque. Dans le théorème de Cauchy, il est essentiel que le domaine élémentaire K soit **entièrement contenu** dans l'ouvert Ω sur lequel f est holomorphe : il ne suffit pas d'avoir $\partial K \subset \Omega$. Par exemple, $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et $K = \overline{\mathbb{D}}$ vérifie $\partial K = \partial \mathbb{D} \subset \mathbb{C}^*$, mais on a vu plus haut que $\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$.

APPLICATION. Pour illustrer le théorème de Cauchy, on va montrer que l'intégrale "généralisée" $I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ existe et calculer cette intégrale.

Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ la fonction (holomorphe) définie par

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}\cdot$$

Pour ε et R vérifiant $0 < \varepsilon < R$, notons $K_{\varepsilon,R}$ le domaine élémentaire défini par

$$K_{\varepsilon,R} = \{z \in \mathbb{C};\ \varepsilon \leqslant |z| \leqslant R \text{ et } \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}\,.$$

Comme $K_{\varepsilon,R} \subset \mathbb{C}^*$, on a $\int_{\partial K_{\varepsilon,R}} f(z)\, dz = 0$, d'après le théorème de Cauchy. En paramétrant les 4 "morceaux" de $\partial K_{\varepsilon,R}$, cela s'écrit

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}\, dt + \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}}\, iRe^{it} dt + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t}\, dt - \int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\varepsilon e^{it}}\, i\varepsilon e^{it} dt \\ &= \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}\, dt + i\int_0^\pi e^{iRe^{it}} dt - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-it}}{t}\, dt - i\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{it}} dt\,. \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$2i \int_\varepsilon^R \frac{\sin t}{t}\, dt = -i \underbrace{\int_0^\pi e^{iRe^{it}} dt}_{I_R} + i \underbrace{\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{it}} dt}_{I_\varepsilon}\,. \tag{3.1}$$

Examinons maintenant le comportement de I_ε quand $\varepsilon \to 0$ et de I_R quand $R \to \infty$.

Pour $t \in [0,\pi]$ fixé, $e^{i\varepsilon e^{it}}$ tend vers 1 quand $\varepsilon \to 0$. De plus, on a

$$\left|e^{i\varepsilon e^{it}}\right| = \left|e^{i\varepsilon \cos t - \varepsilon \sin t}\right| = e^{-\varepsilon \sin t} \leqslant 1$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $t \in [0,\pi]$, car $\sin t \geqslant 0$ sur $[0,\pi]$. D'après le théorème de convergence dominée, on en déduit

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = \int_0^\pi dt = \pi\,.$$

D'autre part, on a $|I_R| \leqslant \int_0^\pi \left|e^{iRe^{it}}\right| dt = \int_0^\pi e^{-R\sin t} dt$, et $\lim_{R\to\infty} e^{-R\sin t} = 0$ pour tout $t \in]0,\pi[$ car $\sin t > 0$ sur $]0,\pi[$. Comme $\left|e^{-R\sin}\right| \leqslant 1$ pour tout R et pour tout $t \in [0,\pi]$, on en déduit (à nouveau par convergence dominée)

$$\lim_{R\to\infty} I_R = 0\,.$$

Au total, on voit que le membre de droite de (3.1) tend vers $-i\times 0 + i\pi = i\pi$ quand $\varepsilon \to 0$ et $R \to \infty$. Donc le membre de gauche tend également vers $i\pi$: autrement dit, $I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$ existe en tant qu'intégrale généralisée et on a $2i\, I = i\pi$. D'où finalement

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Exercice 1. Montrer que I_ε tend vers π quand $\varepsilon \to 0$ sans utiliser le théorème de convergence dominée.

Exercice 2. En utilisant la concavité de la fonction sinus sur $[0,\pi/2]$, montrer qu'on a $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}\, t$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, et en déduire l'inégalité

$$\int_0^\pi e^{-R\sin t} dt \leqslant \frac{\pi}{R}\cdot$$

Exercice 3. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt \geqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{(n+1)\pi}\,,$$

et en déduire que l'intégrale I n'est pas absolument convergente.

3.3. La “formule de Cauchy”. Le théorème suivant est le résultat le plus important de toute la théorie des fonctions holomorphes.

THÉORÈME 3.4. (formule de Cauchy)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f \in H(\Omega)$. Si $K \subset \Omega$ est un domaine élémentaire, alors

$$\forall a \in \overset{\circ}{K} \;:\; f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\, dz\,.$$

Démonstration. Fixons un domaine élémentaire $K \subset \Omega$ et un point $a \in \overset{\circ}{K}$. Fixons également $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\overline{D}(a,\varepsilon_0) \subset \overset{\circ}{K}$.

Pour ε vérifiant $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, posons $K_\varepsilon = K \backslash D(a,\varepsilon)$. En faisant un dessin, on voit que K_ε est un domaine élémentaire, avec $\partial K_\varepsilon = \partial K \cup \partial D(a,\varepsilon)$. De plus, si on veut calculer une intégrale curviligne sur ∂K_ε, il faut orienter $\partial D(a,\varepsilon)$ dans le sens *anti*-trigonométrique.

Pour $z \in \Omega\backslash\{a\}$, posons

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-a}\cdot$$

La fonction g est holomorphe sur l'ouvert $\Omega\backslash\{a\}$, qui contient le domaine élémentaire K_ε, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$. D'après le théorème de Cauchy, on a donc $\int_{\partial K_\varepsilon} g(z)\, dz = 0$, ce qui s'écrit (compte tenu de l'orientation)

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - \int_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 0. \tag{3.2}$$

En paramétrant le cercle $\partial D(a,\varepsilon)$ par $\gamma(t) = a + \varepsilon e^{it}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\, i\varepsilon e^{it}\, dt \\ &= i\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{it})\, dt\,.\end{aligned}$$

Comme $f(a+\varepsilon e^{it})$ tend vers $f(a)$ quand $\varepsilon \to 0$ et qu'on a de plus $|f(a+\varepsilon e^{it})| \leqslant M := \sup\{|f(z)|;\ z \in \overline{D}(a,\varepsilon_0)\}$ pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, on en déduit (par convergence dominée)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = i\int_0^{2\pi} f(a)\, dt = 2i\pi\, f(a)\,;$$

d'où la formule de Cauchy en faisant tendre ε vers 0 dans (3.2).

□

Corollaire 3.5. *Si $K \subset \mathbb{C}$ est un domaine élémentaire, alors*

$$\forall a \in \mathring{K}\ :\ \int_{\partial K} \frac{dz}{z-a} = 2i\pi\,.$$

Démonstration. On applique la formule de Cauchy avec $f(z) = 1$. □

Chapitre 3

Propriétés des fonctions holomorphes

1. Conséquences "immédiates" de la formule de Cauchy

1.1. Les fonctions holomorphes sont $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.*
(1) *Toute fonction holomorphe sur Ω est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω.*
(2) *Si $f \in H(\Omega)$ et si $K \subset \Omega$ est un domaine élémentaire, on peut "dériver sous l'intégrale" dans la formule de Cauchy : si $n \in \mathbb{N}$, alors*

$$\forall z \in \mathring{K} \ : \ f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi \, .$$

Corollaire 1.2. *Si f est une fonction holomorphe, alors f' est holomorphe.*

La Proposition 1.1 va découler très facilement de la formule de Cauchy et du lemme suivant.

Lemme 1.3. *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'image Γ, et soit $\varphi : \Gamma \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On définit $f : \mathbb{C}\backslash\Gamma \to \mathbb{C}$ par la formule*

$$f(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \, .$$

Alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur l'ouvert $V = \mathbb{C}\backslash\Gamma$, et on peut dériver sous l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ f^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi \, .$$

Remarque. Par convention, la dérivée 0-ième de f est f elle même, et on a $0! = 1$. La formule précédente est donc bien valable pour $n = 0$.

Démonstration. On pourrait utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, mais il est également instructif de donner une preuve plus "directe".

L'ensemble $V = \mathbb{C}\backslash\Gamma$ est bien un ouvert de $\mathbb{C}$ car Γ est compact (et donc fermé). Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on posera

$$f_p(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^p} \, d\xi \, .$$

Il suffit de démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_p est $\mathbb{C}$-dérivable sur V avec $f_p' = p f_{p+1}$: on obtient alors le lemme par une récurrence immédiate.

Fixons $p \in \mathbb{N}^*$ et un point $z_0 \in V$. Soit également $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset V$, i.e. $\overline{D}(z_0, r) \cap \Gamma = \varnothing$.

Si $z \in D(z_0, r) \subset V$, alors

$$\begin{aligned} f_p(z) - f_p(z_0) &= \int_\gamma \varphi(\xi) \left[\frac{1}{(\xi - z)^p} - \frac{1}{(\xi - z_0)^p} \right] d\xi \\ &= \int_\gamma \frac{(\xi - z_0)^p - (\xi - z)^p}{(\xi - z)^p (\xi - z_0)^p} \varphi(\xi)\, d\xi \,. \end{aligned}$$

De plus, l'identité $b^p - a^p = (b-a)(a^{p_1} + a^{p-2}b + \cdots + ab^{p-2} + b^{p-1})$ permet d'écrire

$$(\xi - z_0)^p - (\xi - z)^p = (z - z_0) \times \sum_{k=0}^{p-1} (\xi - z_0)^{p-1-k} (\xi - z)^k$$

et donc (pour $z \neq z_0$)

$$\begin{aligned} \frac{f_p(z) - f_p(z_0)}{z - z_0} &= \int_\gamma \frac{\sum\limits_{k=0}^{p-1} (\xi - z_0)^{p-1-k} (\xi - z)^k}{(\xi - z)^p (\xi - z_0)^p} \varphi(\xi)\, d\xi \\ &= \int_\gamma A(\xi, z)\, \varphi(\xi)\, d\xi \,. \end{aligned}$$

Quand z tend vers z_0, on voit que $A(\xi, z)$ tend vers $\frac{p \times (\xi - z_0)^{p-1}}{(\xi - z_0)^{2p}} = \frac{p}{(\xi - z_0)^{p+1}}$. De plus, la fonctions A est continue sur $\Gamma \times \overline{D}(z_0, r)$ qui est *compact*, donc A est bornée sur $\Gamma \times \overline{D}(z_0, r)$. D'après le théorème de convergence dominée, on en déduit

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f_p(z) - f_p(z_0)}{z - z_0} = p \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z_0)^{p+1}}\, d\xi = p f_{p+1}(z_0) \,.$$

Ainsi, f_p est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point $z_0 \in V$ avec $f_p' = p f_{p+1}$, ce qui termine la démonstration. $\square$

Preuve de la proposition 1.1. Fixons une fonction $f \in H(\Omega)$.

(1) Soit $z_0 \in \Omega$ quelconque, et choisissons $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. D'après la formule de Cauchy, on a

$$\forall z \in D(z_0, r) \ : \ f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \,.$$

D'après le lemme, on en déduit que f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(z_0, r)$, donc au voisinage de z_0. Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in \Omega$, cela prouve (1).

(2) Soit $K \subset \Omega$ un domaine élémentaire, et soit $(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ un paramétrage admissible de ∂K. D'après la formule de Cauchy, on a

$$\forall z \in \mathring{K} \ : \ f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_j} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \,.$$

D'après le lemme, on peut dériver sous chaque intégrale $\int_{\gamma_j}$, et on en déduit que si $z \in \mathring{K}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=1}^{N} n! \int_{\gamma_j} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi \,.$$

$\square$

1.2. Formules de la moyenne. Le résultat suivant est un cas très particulier de la formule de Cauchy, mais il est suffisamment important pour être énoncé séparément.

PROPOSITION 1.4. (formule de la moyenne pour les cercles)
Si f est une fonction holomorphe au voisinage d'un disque fermé $\overline{D}(a,R)$, alors

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+Re^i\theta)\,d\theta\,.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule de Cauchy pour le disque $\overline{D}(a,R)$, en paramétrant le cercle $\partial D(a,R)$ par $z = a + Re^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,R)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+Re^{i\theta})}{(a+Re^{i\theta})-a}\,iRe^{i\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}\,Re^{i\theta}d\theta\,. \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 1.5. (formule de la moyenne pour les disques)
Si f est une fonction holomorphe au voisinage d'un disque $\overline{D}(a,R)$, alors

$$f(a) = \frac{1}{\pi R^2}\int_{\overline{D}(a,R)} f(x,y)\,dxdy\,.$$

Démonstration. En intégrant en coordonnées polaires et en utilisant la formule de la moyenne pour les cercles, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\overline{D}(a,R)} f(x,y)\,dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^R f(a+re^{i\theta})\,rdrd\theta \\ &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta\right) rdr \\ &= \int_0^R 2\pi f(a)\,rdr \\ &= \pi R^2 f(a)\,. \end{aligned}$$

□

1.3. Une remarque utile. La formule de Cauchy

$$\forall z \in D(a,R)\ :\ f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,R)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

et la formule de la moyenne

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{i\theta})\,d\theta$$

ont été établies pour une fonction f holomorphe *au voisinage du disque fermé* $\overline{D}(a,R)$. En fait, un résultat un peu plus général est vrai :

REMARQUE 1.6. La formule de Cauchy et la formule de la moyenne sont valables pour toute fonction $f : \overline{D}(a,R) \to \mathbb{C}$ continue sur $\overline{D}(a,R)$ et holomorphe dans le disque ouvert $D(a,R)$.

Démonstration. Il suffit de prouver la formule de Cauchy car la formule de la moyenne correspond au cas particulier $z = a$ (cf la preuve de la proposition 1.4).

Si $z \in D(a, R)$ et si r vérifie $|z - a| < r < R$, alors f est holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D}(a, r)$ et $z \in D(a, r)$, donc

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\,.$$

En utilisant la continuité de f sur $\overline{D}(a, R)$, il n'est alors pas difficile de montrer qu'on peut faire tendre r vers R dans cette formule pour obtenir le résultat souhaité. Les détails sont laissés en exercice. □

2. Holomorphie et analyticité

On a vu au chapitre 1 que la somme d'une série entière est une fonction holomorphe dans le disque ouvert où elle est naturellement définie. Le théorème suivant montre que la réciproque est vraie : toute fonction holomorphe dans un disque est la somme d'une série entière. Il s'agit évidemment d'un résultat *très* important.

THÉORÈME 2.1. *Si f est une fonction holomorphe dans un disque ouvert D de centre a,alors f est "développable en série entière" dans D : on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\, (z - a)^n$$

pour tout $z \in D$, où la série converge normalement sur tout compact de D.

Démonstration. Notons R le rayon de D, fixons un point $z \in D = D(a, R)$, et choisissons r tel que $|z - a| < r < R$. D'après la formule de Cauchy, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\,.$$

De plus, si $\xi \in \partial D(a, r)$ alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} \\ &= \frac{1}{\xi - a} \times \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi - a}}\,, \end{aligned}$$

et on a $\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| = \frac{|z-a|}{r} < 1$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - a} &= \frac{1}{\xi - z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\xi - a}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\xi - a)^{n+}}\,, \end{aligned}$$

où la série converge normalement sur $\partial D(a, r)$.

En revenant à la formule de Cauchy, on en déduit

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\partial D(a,r)} \left(\frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+}} f(\xi) \right) d\xi \\ &= \sum \int \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \, d\xi \right) (z-a)^n \, , \end{aligned}$$

où l'interversion de la somme infinie et de l'intégrale est justifiée par la convergence normale de la série sur $\partial D(a,r)$. Comme $\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \, d\xi = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (d'après la formule de Cauchy dérivée n fois), on obtient donc bien le résultat souhaité :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \, .$$

Enfin, La convergence normale de la série sur tout compact de $D(a,R)$ est claire, car il s'agit d'une série entière en $(z-a)$ qui converge en tout point de $D(a,R)$, donc de rayon de convergence au moins égal à R.

□

Corollaire 2.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $f \in H(\Omega)$, alors f est développable en série entière dans tout disque ouvert $D \subset \Omega$.*

On peut donc boucler une boucle débutée au chapitre 2 :

Corollaire 2.3. *Toute fonction holomorphe est $\mathbb{C}$-analytique, et par conséquent*

$$\text{“holomorphe”} \iff \text{“}\mathbb{C}\text{-analytique”} \, .$$

Exercice. Soit f la fonction définie par $f(z) = \frac{1}{z^2-2z-2}$.

(a) Déterminer le plus grand disque $D(0,R)$ sur lequel f est holomorphe.
(b) Décomposer $f(z)$ en éléments simples, puis déterminer le développement en série entière de f dans le disque $D(0,R)$.

La proposition suivante donne plusieurs formules pour les coefficients d'un développement en série entière.

Proposition 2.4. (calcul des coefficients d'un DSE)
Soit f une fonction holomorphe dans un disque ouvert $D = D(a,R)$, et écrivons $f(z) = \sum_0^\infty c_n (z-a)^n$.

(1) *On a $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
(2) *On a aussi*

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \, d\xi \, ,$$

pour n'importe quel r tel que $0 < r < R$.

(3) *Pour $0 < r < R$, notons $f_r : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ la fonction continue 2π-périodique définie par $f_r(t) = f(a+re^{it})$, et notons $\widehat{f_r}(n)$ ses* ***coefficients de Fourier*** *:*

$$\forall n \in \mathbb{Z} \; : \; \widehat{f_r}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{it}) e^{-int} dt \, .$$

Avec ces notations, on a

$$\widehat{f_r}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ c_n r^n & \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

(4) *Si f est de plus continue sur $\overline{D}(a,R)$, alors les formules de (2) et (3) sont encore valables pour $r = R$.*

Démonstration. La partie (1) est comprise dans l'énoncé du théorème 2.1, et (2) a été vu dans le cours de la preuve de ce théorème.

Pour démontrer (3), on peut partir de la formule de (2), qui a un sens pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, et paramétrer le cercle $\partial D(a,r)$: on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \, d\xi &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it})}{((a + re^{it}) - a)^{n+1}} \, ire^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + r^{it})}{r^n} \, e^{-int} dt \\ &= r^{-n} \widehat{f_r}(n) \,, \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. D'après (2), on a donc $\widehat{f_r}(n) = c_n r^n$ si $n \geqslant 0$; et pour $n < 0$, on voit que $\widehat{f_r}(n) = 0$ car $\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \, d\xi = \int_{\partial D(a,r)} f(\xi)(\xi - a)^{-n-1} \, d\xi = 0$ d'après le théorème de Cauchy (la fonction $\xi \mapsto f(\xi)(\xi - a)^{-n-1}$ est holomorphe au voisinage de $\overline{D}(a,r)$ car $-n-1$ est un entier positif).

On peut aussi obtenir (3) de la façon suivante, peut-être plus naturelle. Par définition de g_r et comme $f(z) = \sum_0^\infty c_k (z - a)^k$, on a

$$\begin{aligned} f_r(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n ((a + re^{it}) - a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k e^{ikt} \,, \end{aligned}$$

où la série converge normalement sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} \widehat{f_r}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k e^{ikt} e^{-int} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum \int \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt \right) . \end{aligned}$$

(L'interversion de l'intégrale et de la somme infinie est justifiée par la convergence normale de la série sur $[0, 2\pi]$). De plus, un calcul immédiat montre que pour $m \in \mathbb{Z}$, l'intégrale $\int_0^{2\pi} e^{imt} dt$ vaut 0 si $m \neq 0$ et 2π si $m = 0$. Par conséquent, dans la somme précédente tous les termes sont nuls sauf éventuellement celui correspondant à $k = n$ (ce qui suppose $n \geqslant 0$), qui est égal à $c_n r^n$. D'où (3).

La preuve de (4) est laissée en exercice : il suffit d'observer que si f est continue sur $\overline{D}(a,R)$, alors $\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \, d\xi$ et $\widehat{f_r}(n)$ dépendent continûment de $r \in [0, R]$, et de faire tendre r vers R dans (2) et (3). $\square$

COROLLAIRE 2.5. *Si f est holomorphe sur $D(a,R)$, $f(z)=\sum_0^\infty c_n(z-a)^n$, alors*

$$\forall r<R\ :\ \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\,r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(a+re^it)|^2\,dt\,,$$

et cette formule est encore valable pour $r=R$ si f est de plus continue sur $\overline{D}(a,R)$.

Démonstration. Cela découle de (3) (et (4)) et de la **formule de Parseval** appliquée à la fonction f_r : on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_r(e^{it})|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}_r(n)|^2\,,$$

ce qui est exactement l'identité voulue. □

3. Zéros des fonctions holomorphes

NOTATION 3.1. *Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega\subset\mathbb{C}$, on pose*

$$Z(f)=\{a\in\Omega;\ f(a)=0\}\,.$$

*On dit que $Z(f)$ est l'ensemble des **zéros** de la fonction f.*

3.1. Factorisation. On sait que si P est un polynôme à coefficients complexes et si a est une racine de P, alors on peut factoriser $P(z)$ sous la forme $P(z)=(z-a)^pQ(z)$, où $p\geqslant 1$ et Q est un polynôme tel que $Q(a)\neq 0$. Le théorème suivant généralise cette propriété algébrique à toutes les fonctions holomorphes.

THÉORÈME 3.2. (théorème de factorisation)
*Soit Ω un ouvert **connexe** de $\mathbb{C}$ et soit $f\in H(\Omega)$ **non identiquement nulle**. Pour tout point $a\in Z(f)$, il existe un entier $p\geqslant 1$ et une fonction $g:\Omega\to\mathbb{C}$ tels que*

(i) $\forall z\in\Omega\ :\ f(z)=(z-a)^pg(z)$ *;*

(ii) *g est holomorphe et $g(a)\neq 0$.*

L'entier p et la fonction g sont déterminés de manière unique par (i) *et* (ii). *On dit que p est la **multiplicité** de a comme zéro de f.*

Pour la preuve du théorème, on aura besoin du lemme suivant.

LEMME 3.3. *Soit $f\in H(\Omega)$ et soit $A=\{a\in\Omega;\ \forall n\in\mathbb{N}\ :\ f^{(n)}(a)=0\}$. Alors A est à la fois ouvert et fermé dans Ω.*

Démonstration. Comme toutes les fonctions $f^{(n)}$ sont continues, il est clair que $A=\bigcap_n Z(f^{(n)})$ est un fermé de Ω.

Soit $a\in A$ quelconque. Comme $a\in\Omega$, on peut choisir $r>0$ tel que $D(a,r)\subset\Omega$; et comme f est holomorphe, on a alors

$$\forall z\in D(a,r)\ :\ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(z-a)^n\,.$$

Comme $f^{(n)}(a)=0$ pour tout n (puisque $a\in A$), on voit ainsi que f est identiquement nulle sur le disque ouvert $D(a,r)$, et donc $f^{(n)}\equiv 0$ sur $D(a,r)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Autrement dit, $D(a,r)$ est contenu dans A. Comme a est un point quelconque de A, cela prouve que A est un ouvert de Ω.

□

Corollaire 3.4. *Si Ω est connexe et si $f \in H(\Omega)$ n'est pas identiquement nulle alors, pour tout point $a \in \Omega$, il existe un entier n tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$.*

Démonstration. Par connexité, l'ensemble A est soit vide soit égal à Ω. Comme f n'est pas identiquement nulle, on a $A \neq \Omega$; donc $A = \varnothing$, ce qui est la conclusion souhaitée. $\square$

Remarque. On sait bien que ce dernier résultat n'est pas valable pour les fonctions d'une variable réelle. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := e^{1/x}$ pour $x > 0$ et $f(x) := 0$ pour $x \leqslant 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais elle n'est pas identiquement nulle.

Preuve du théorème de factorisation. Fixons $a \in Z(f)$.

Montrons d'abord l'existence de l'entier p et de la fonction g. Par le lemme (et son corollaire), on peut poser

$$p = \min\{n \in \mathbb{N};\ f^{(n)}(a) \neq 0\}\,.$$

Alors $p \geqslant 1$ car $f^{(0)}(a) = f(a) = 0$; et par définition de p, on a $f^{(p)}(a) \neq 0$ et $f(a) = \cdots = f^{(p-1)}(a) = 0$.

Choisissons $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Omega$. Si $z \in D(a,r)$, alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(z-a)^n \\ &= \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(z-a)^n \\ &= (z-a)^p \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(z-a)^{n-p} \\ &= (z-a)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(p+k)}(a)}{(p+k)!}\,(z-a)^k\,. \end{aligned}$$

La série entière $\sum_{k\geqslant 0} \frac{f^{(p+k)}(a)}{(p+k)!}\,(z-a)^k$ (série entière en $z-a$) converge en tout point $z \in D(a,r)$, donc la fonction

$$\widetilde{g}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(p+k)}(a)}{(p+k)!}\,(z-a)^k$$

est bien définie et holomorphe sur $D(a,r)$. Par définition, on a $\widetilde{g}(a) = \frac{f^{(p)}(a)}{p!} \neq 0$, et

$$f(z) = (z-a)^p\,\widetilde{g}(z)$$

pour tout $z \in D(a,r)$.

Définissons alors une fonction $g : \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$g(z) = \begin{cases} \widetilde{g}(a) & \text{si } z = a \\ \frac{f(z)}{(z-a)^p} & \text{si } z \neq a \end{cases}$$

La fonction g est visiblement holomorphe sur $\Omega\backslash\{a\}$, et elle l'est également au voisinage de a car $g \equiv \widetilde{g}$ sur $z \in D(a,r)$. Donc g est holomorphe sur Ω. De plus, on a $g(a) = \widetilde{g}(a) \neq 0$ et $f(z) = (z-a)^p g(z)$ pour tout $z \in \Omega$ par définition de g.

Pour démontrer l'unicité, supposons que (p_1, g_1) et (p_2, g_2) vérifient (i) et (ii). Alors

$$(z-a)^{p_1} g_1(z) = f(z) = (z-a)^{p_2} g_2(z) \tag{3.1}$$

pour tout $z \in \Omega$. Si $p_1 \neq p_2$, on a par exemple $p_1 < p_2$ et donc $g_1(z) = (z-a)^{p_2-p_1} g_2(z)$. En particulier, on obtient $g_1(a) = 0$, ce qui est exclu. Donc $p_1 = p_2$. On en déduit $g_1(z) = g_2(z)$ pour $z \neq a$ en divisant par $(z-a)^{p_1} = (z-a)^{p_2}$ dans (3.1), donc également $g_1(a) = g_2(a)$ par continuité, et ainsi $g_1 = g_2$. □

Remarque. La preuve du théorème a établi que la multiplicité de a comme zéro de f est le plus petit entier n tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$.

3.2. Le principe des zéros isolés. Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème de factorisation.

Théorème 3.5. (principe des zéros isolés)
Soit Ω un ouvert connexe *de $\mathbb{C}$. Si $f \in H(\Omega)$ n'est pas identiquement nulle, alors tous les zéros de f sant* ***isolés*** *: pour tout $a \in Z(f)$, on peut trouver un voisinage ouvert V de a tel que f n'a pas d'autre zéro que a dans V.*

Démonstration. Soit $a \in Z(f)$, et écrivons $f(z) = (z-a)^p g(z)$ comme dans le théorème de factorisation. Comme $g(a) \neq 0$ et comme g est continue au point a, on peut trouver un voisinage ouvert V de a tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in V$. Alors $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in V$ différent de a, donc le voisinage V convient. □

Exemple. Si $f(z) = \cos z$, alors $Z(f) = \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$: on voit bien que les zéros de f sont isolés !

Rappel. Soit $A \subset \mathbb{C}$, et soit $w \in \mathbb{C}$. On dit que w est un **point d'accumulation de** A si tout voisinage de w contient une infinité de points de A.

Exercice 1. Montrer que w est un point d'accumulation de A si et seulement si il existe une suite (a_n) de points de A telle que $a_n \to w$ et $a_n \neq w$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2. Montrer que tout point d'accumulation de A appartient à $\overline{A}$, et que tout point $w \in \overline{A} \backslash A$ est un point d'accumulation de A.

Exemples.

(1) L'ensemble $A = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ possède 1 point d'accumulation, à savoir $w = 0$.
(2) Si W est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors tout point de W est un point d'accumulation de W.
(3) Si I est un segment nontrivial de $\mathbb{C}$, alors tout point de I est un point d'accumulation de I.

Corollaire 3.6. *Si f est une fonction holomorphe non identiquement nulle sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors $Z(f)$ ne possède pas de points d'accumulation dans Ω.*

Démonstration. C'est évident par le principe des zéros isolés. □

Remarque. En revanche, $Z(f)$ peut possèder des points d'accumulation en dehors de Ω. Par exemple, $f(z) = \sin(1/z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et $Z(f) = \{\frac{1}{n\pi};\ n \in \mathbb{Z}^*\}$ admet 0 comme point d'accumulation.

Corollaire 3.7. (principe d'identité)
Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(1) *S'il existe un ensemble $A \subset \Omega$ possèdant un point d'accumulation dans Ω tel que $f(\xi) = g(\xi)$ pour tout $\xi \in A$, alors $f = g$.*

(2) *En particulier :*

(i) *s'il existe un ouvert non-vide $W \subset \Omega$ tel que $f \equiv g$ sur W, alors $f = g$;*

(ii) *s'il existe un segment nontrivial $I \subset \Omega$ tel que $f \equiv g$ sur I alors $f = g$.*

Exemple 1. Considérons la "formule d'addition"

$$\cos(u + v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)\,.$$

On sait que cette formule est vraie pour $u, v \in \mathbb{R}$. Pour $u \in \mathbb{R}$ fixé, les deux fonctions $f(v) = \cos(u + v)$ et $g(v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et $f \equiv g$ sur $\mathbb{R}$; donc $f = g$ par le principe d'identité, autrement dit la formule d'addition est vraie pour $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{C}$ quelconque. En fixant maintenant $v \in \mathbb{C}$ et en appliquant le même raisonnement aux fonctions $u \mapsto \sin(u+v)$ et $u \mapsto \cos(u)\cos(v)-\sin(u)\sin(v)$, on conclut que la formule d'addidtion est vraie pour $u, v \in \mathbb{C}$ quelconques.

Exemple 2. On sait depuis qu'on est petit qu'on a $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Comme les fonctions $z \mapsto \log(1 - z)$ et $z \mapsto -\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ sont holomorphes sur le disque $\mathbb{D} = D(0, 1)$, on *en déduit* qu'on a $\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ par le principe d'identité.

Corollaire 3.8. *Si f est une fonction holomorphe non identiquement nulle sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors*

(i) *$Z(f) \cap K$ est fini pour tout compact $K \subset \Omega$;*

(ii) *$Z(f)$ est **dénombrable**.*

Démonstration. (i) Soit K un compact de Ω. Si $Z(f) \cap K$ était infini, on pourrait trouver une suite de points deux à deux distincts dans $Z(f) \cap K$. Par compacité, on pourrait en extraire une sous-suite convergente, et on obtiendrait ainsi une suite $(a_n) \subset Z(f) \cap K$ convergeant vers un point $a \in K$, les a_n étant deux à deux distincts. Alors a est un point d'accumulation de l'ensemble $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, donc un point d'accumulation de $Z(f)$, ce qui est impossible puisque $a \in \Omega$.

La partie (ii) découle de (i) et du fait suivant, dont la preuve est laissée en exercice.

Fait. L'ouvert Ω est réunion dénombrable de compacts. Plus précisément, si on pose $K_n = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqslant n \text{ et } \operatorname{dist}(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) \geqslant 2^{-n}\}$, alors les K_n sont compacts et $\Omega = \bigcup_0^{\infty} K_n$.

En effet, en écrivant $Z(f) = \bigcup_0^{\infty} Z(f) \cap K_n$, on voit que $Z(f)$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis, donc un ensemble dénombrable.

□

Exercice. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Montrer que si f et g sont deux fonctions holomorphes sur Ω telles que $fg = 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$. En termes algébriques, cela signifie que $H(\Omega)$ est un anneau **intègre**.

4. Le théorème de Liouville

4.1. Cauchy. Le résultat suivant est souvent très utile.

LEMME 4.1. (inégalités de Cauchy)
Soit f une fonction holomorphe dans un disque $D(0,R)$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. Pour $0 \leqslant r < R$, posons $M(r) = \sup\{|f(\xi)|;\ |\xi| = r\}$. Avec ces notations, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \ :\ |c_n| r^n \leqslant M(r)\,.$$

Démonstration. C'est évident en écrivant la formule de la moyenne

$$c_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int}\, dt$$

et en majorant le module de l'intégrale :

$$|c_n|\, r^n \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(r)\, dt = M(r)\,.$$

□

4.2. Liouville.

DÉFINITION 4.2. *Une **fonction entière** est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.*

THÉORÈME 4.3. *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. On suppose qu'il existe des constantes A, B et k telles que*

$$\forall z \in \mathbb{C} \ :\ |f(z)| \leqslant A + B\,|z|^k\,.$$

Alors f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à k.

Démonstration. Écrivons $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. D'après les inégalités de Cauchy, on a

$$\begin{aligned} |c_n|\, r^n &\leqslant \sup\{|f(\xi)|;\ |\xi| = r\} \\ &\leqslant A + B\, r^k \end{aligned}$$

pour tout $r > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc

$$|c_n| \leqslant \frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^{n-k}}\,.$$

En faisant tendre r vers l'infini, on en déduit $c_n = 0$ pour tout $n > k$; donc $f(z) = \sum_{n \leqslant k} c_n z^n$, et f est polynomiale de degré au plus k. □

Le "théorème de Liouville" proprement dit est le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.4. *Toute fonction entière bornée est constante.*

Démonstration. On applique le théorème avec $k = 0$, $A = 0$ et une constante B telle que $|f(z)| \leqslant B = 0 + B\,|z|^0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. La conclusion est que f est une fonction polynomiale de degré $\leqslant 0$, c'est-à-dire une fonction constante. □

COROLLAIRE 4.5. *Si f est une fonction entière et si $f(z)$ tend vers 0 quand $|z| \to \infty$, alors $f = 0$.*

Démonstration. Comme f est continue, l'hypothèse entraine que f est bornée sur $\mathbb{C}$, et donc constante par le théorème de Liouville ; et comme $f(z) \to 0$ quand $|z| \to \infty$, la constante vaut 0. □

4.3. D'Alembert-Gauss. Comme illustration du théorème de Liouville, on va démontrer le "théorème fondamental de l'algèbre", qu'on appelle également "théorème de d'Alembert-Gauss".

THÉORÈME 4.6. *Si P est un polynôme non constant à coefficients complexes, alors P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

COROLLAIRE 4.7. *Tout polynôme P à coefficients complexes de degré $n \geqslant 1$ peut se décomposer sous la forme $P(z) = C\,(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)$, où $C, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. On sait que si α est une racine de P, alors on peut écrire $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$, où Q est un polynôme de degré $n-1$. Le résultat se déduit donc du théorème en raisonnant par récurrence sur $n = \deg(P)$. $\square$

Preuve du théorème. Supposons que P ne possède aucune racine dans $\mathbb{C}$. Alors

$$f(z) := \frac{1}{P(z)}$$

est bien défini pour tout $z \in \mathbb{C}$, et f est une fonction entière. De plus, comme le polynôme P est non constant, on vérifie facilement que $|P(z)|$ tend vers l'infini quand $|z| \to \infty$. Donc $f(z)$ tend vers 0 quand $|z| \to \infty$, et par conséquent $f = 0$, ce qui est absurde puisque f ne s'annule pas. $\square$

5. Le principe du maximum

5.1. Le résultat de base. Il existe de nombreuses versions du "principe du maximum", valables pour diverses catégories de fonctions. Pour les fonctions holomorphes, le rśultat de base s'énonce comme suit.

THÉORÈME 5.1. *Soit Ω un ouvert* ***borné*** *de $\mathbb{C}$, et soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction* ***continue sur*** $\overline{\Omega}$ *et holomorphe dans Ω.*

(1) *Pour tout point $z \in \Omega$, on a $|f(z)| \leqslant \sup_{\xi \in \partial\Omega} |f(\xi)|$.*

(2) *Si Ω est* ***connexe*** *et si f est* ***non constante****, alors l'inégalité précédente est stricte : $|f(z)| < \sup_{\xi \in \partial\Omega} |f(\xi)|$ pour tout $z \in \Omega$.*

Démonstration. On démontre d'abord (2). Supposons donc que Ω est connexe et que f n'est pas constante. Posons $M = \sup_{\xi \in \overline{\Omega}} |f(\xi)|$. Il suffit de montrer qu'on a

$$\forall z \in \Omega \;:\; |f(z)| < M. \tag{5.1}$$

En effet, comme $\overline{\Omega}$ est compact (car Ω est borné) et f continue, on peut trouver $\xi_0 \in \overline{\Omega}$ tel que $|f(\xi_0)| = M$. Si (5.1) est vraie alors nécessairement $\xi_0 \in \partial\Omega$, donc $M = \sup_{\partial\Omega} |f|$ et donc $|f(z)| < \sup_{\partial\Omega} |f|$ pour tout $z \in \Omega$ (à nouveau grâce à (5.1)). La preuve de (5.1) repose sur le fait suivant :

FAIT. L'ensemble $A = \{z \in \Omega;\ |f(z)| = M\}$ est ouvert et fermé dans Ω.

Preuve du Fait. L'ensemble A est fermé dans Ω car la fonction $|f|$ est continue. Pour montrer que A est ouvert, fixons $z_0 \in A$. Il s'agit de trouver $r_0 > 0$ tel que $D(z_0, r_0) \subset A$. On va en fait montrer que n'importe quel r_0 tel que $D(z_0, r_0) \subset \Omega$ convient. Fixons un tel r_0.

D'après la formule de la moyenne, on a pour tout $r \in [0, r_0[$:

$$\begin{aligned} M = |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|\, d\theta \,. \end{aligned}$$

En écrivant $M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M\, d\theta$ on en déduit

$$\int_0^{2\pi} \Big(M - |f(z_0 + re^{i\theta})| \Big)\, d\theta = 0 \,.$$

La fonction de θ apparaissant sous l'intégrale étant continue et *positive* par définition de M, elle est donc identiquement nulle sur $[0, 2\pi]$. Ainsi, on a $|f(z_0 + re^{i\theta})| = M$ pour tout $r \in [0, r_0[$ et pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, autrement dit $|f(z)| \equiv M$ sur $D(z_0, r_0)$, ou encore $D(z_0, r_0) \subset A$. □

Par connexité de Ω, l'ensemble A est soit vide, soit égal à Ω tout entier. Si $A = \Omega$, alors la fonction $|f|$ est constante sur Ω. On a donc $\Delta|f|^2 \equiv 0$ sur $D(z_0, r)$, et comme $\Delta|f|^2 = 4|f'|^2$ (exo), cela montre que f est constante sur Ω puisque Ω est supposé connexe. Par continuité, f est constante sur $\overline{\Omega}$, ce qui est exclu par hypothèse. On ne peut donc pas avoir $A = \Omega$. Ainsi $A = \varnothing$, ce qui démontre (5.1) et donc (2).

Pour démontrer (1), fixons $z \in \Omega$, et notons Ω_z la **composante connexe** de Ω contenant z. Comme Ω est ouvert, on sait que Ω_z est un *ouvert* (borné) de $\mathbb{C}$, et on a $\partial\Omega_z \subset \partial\Omega$. Si la fonction f est constante sur $\overline{\Omega_z}$, alors $|f(z)| = \sup_{\partial\Omega_z} |f| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |f|$. Si f n'est pas constante sur $\overline{\Omega_z}$, alors $|f(z)| < \sup_{\partial\Omega_z} |f|$ d'après (2) appliqué à $f_{|\overline{\Omega_z}}$, et donc $|f(z)| < \sup_{\partial\Omega} |f|$. □

Remarque. On peut aussi énoncer une version du principe du maximum en remplaçant $|f|$ par $\mathrm{Re}(f)$. La démonstration est identique, le seul point à vérifier étant que si $u = \mathrm{Re}(f)$ est constante et si Ω est connexe, alors f est constante. Mais ceci est clair car $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} f'$, et donc $f' = 0$ si u est constante.

Corollaire 5.2. ("principe du maximum local")
Soit Ω un ouvert ***connexe*** *de $\mathbb{C}$. Si $f \in H(\Omega)$ et si $|f|$ possède un* ***maximum local*** *en un point de Ω, alors f est constante. En particulier, si $|f|$ possède un maximum sur Ω, alors f est constante.*

Démonstration. Supposons que $|f|$ possède un maximum local en un point $z_0 \in \Omega$. On peut alors trouver un disque ouvert D centré en z_0 tel que $\overline{D} \subset \Omega$ et $|f(z_0)| \geqslant |f(\xi)|$ pour tout $\xi \in \overline{D}$, donc en particulier pour tout $\xi \in \partial D$. D'après le principe du maximum, la fonction f est constante sur D, donc constante sur Ω d'après le principe d'identité. □

Corollaire 5.3. ("principe du minimum local")
Soit Ω un ouvert ***connexe*** *de $\mathbb{C}$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe* ***non constante*** *et si $|f|$ possède un* ***minimum local*** *en un point $z_0 \in \Omega$, alors $f(z_0) = 0$.*

Démonstration. Supposons que $f(z_0) \neq 0$. Par continuité, on peut alors trouver un disque ouvert D centré en z_0 tel que f ne s'annule pas sur D. La fonction $g = 1/f$ est bien définie et holomorphe sur D, et $|g| = 1/|f|$ possède un maximum local en z_0. Comme D est connexe, le principe du maximum local assure que g est constante sur

D. Ainsi, f est constante sur D, donc constante sur Ω d'après le principe d'identité, ce qui est exclu par hypothèse.

$\square$

Exercice. Démontrer le théorème fondamental de l'algèbre en utilisant le principe du minimum local.

5.2. Un résultat plus général. Le principe du maximum n'est pas réservé aux seules fonctions holomorphes :

THÉORÈME 5.4. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et soit $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ dans Ω. On suppose que le Laplacien Δu est partout $\geqslant 0$ dans Ω.*

(a) *Pour tout point $z \in \Omega$, on a $u(z) \leqslant \sup_{\xi \in \partial\Omega} u(\xi)$.*

(b) *Si Ω est connexe et si u n'est pas constante, alors l'inégalité précédente est stricte.*

Les remarques suivantes montrent que ce résultat est plus général que le théorème 5.1.

REMARQUE 5.5. Si $n = 2$ et si $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ est continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe dans Ω, on peut appliquer le théorème 5.4 à la fonction $u = |f|^2$ car $\Delta u = 4|f'|^2 \geqslant 0$, et on déduit immédiatement de (a) la partie (1) du théorème 5.1. De plus, si Ω est connexe alors u est constante si et seulement si f l'est (toujours à cause de l'identité $\Delta u = 4|f'|^2$), donc on retrouve la partie (2) du théorème 5.1 en appliquant (b).

On peut aussi appliquer le théorème 5.4 à la fonction $u = \mathrm{Re}(f)$, car $\Delta u = 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}(f + \overline{f}) = 0$. Si Ω est connexe, alors u est constante si et seulement si f l'est car $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial (f+\bar{f})}{\partial z} = \frac{1}{2} f'$. On obtient ainsi une version du théorème 5.1 ou $|f|$ est remplacé par $\mathrm{Re}(f)$.

On ne démontrera le théorème 5.4 que pour $n = 2$. La preuve repose sur le lemme suivant.

LEMME 5.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, et soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω vérifiant $\Delta u \geqslant 0$. Alors u possède la* ***propriété de sous-moyenne*** *: pour tout disque fermé $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$, on a*

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Démonstration. Fixons un disque $\overline{D}(z_0, r_0) \subset \Omega$, et pour $r \in [0, r_0]$, posons

$$I(r) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Comme la fonction $F(r, \theta) = u(z_0 + re^{i\theta})$ possède une dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial r}$ continue sur $[0, r_0] \times [0, 2\pi]$, la fonction I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, r_0]$ d'après le théorème le plus élémentaire sur les intégrales à paramètres, et on peut dériver sous l'intégrale. Le point clé est le fait suivant :

FAIT. Pour $r > 0$ on a $I'(r) = \dfrac{1}{r} \displaystyle\int_{\overline{D}(z_0, r)} \Delta u(x, y)\, dxdy$.

Preuve du Fait. Écrivons $z_0 = (x_0, y_0)$. En dérivant sous l'intégrale, on trouve

$$\begin{aligned} r\,I'(r) &= \int_0^{2\pi} r\,\frac{\partial}{\partial r}\Big[u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\Big]\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[r\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_r(\theta), y_r(\theta)) + r\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_r(\theta), y_r(\theta))\right]d\theta\,, \end{aligned}$$

où on a posé $(x_r(\theta), x_r(\theta)) = (x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$. Comme $\gamma_r(\theta) = (x_r(\theta), y_r(\theta))$ paramètre le cercle $\partial D(z_0, r)$, avec $dx = -r\sin\theta\,d\theta$ et $dy = r\cos\theta\,d\theta$, on en déduit

$$r\,I'(r) = \int_{\partial D(z_0,r)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,.$$

D'après la formule de Green-Riemann, cela s'écrit encore

$$r\,I'(r) = \int_{\overline{D}(z_0,r)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy,$$

ce qui est le résultat annoncé. □

Par hypothèse sur u, on a donc $rI'(r) \geqslant 0$ pour tout $r > 0$. Ainsi, la fonction I est croissante sut $]0, r_0]$, donc sur $[0, r_0]$ par continuité. En particulier, on a $I(0) \leqslant I(r_0)$, autrement dit $2\pi\, f(z_0) \leqslant \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_0 e^{i\theta})\,d\theta$.

□

Remarque 5.7. On dit qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est **harmonique** si elle vérifie $\Delta u = 0$. En appliquant le lemme précédent à u et à $-u$, on voit que si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique, alors u possède la **propriété de la moyenne**, i.e.

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta$$

pour tout disque $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$. En fait, on peut montrer que la propriété de la moyenne caractérise les fonctions harmoniques : une fonction continue u est harmonique *si et seulement si* elle vérifie la propriété de la moyenne.

Preuve du théorème 5.4. Compte tenu du lemme 5.6, la preuve consiste à purement et simplement *recopier* celle du théorème 5.1 en remplaçant partout la fonction $|f|$ par la fonction u. Bien entendu, il faut aussi remplacer (1) par (a) et (2) par (b). □

5.3. Deux applications. On va maintenant utiliser le principe du maximum pour démontrer deux autres résultats importants.

Théorème 5.8. ("théorème de l'application ouverte")
*Soit Ω un ouvert **connexe** de $\mathbb{C}$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et **non constante**, alors f est une application **ouverte** : l'image par f de tout ouvert $V \subset \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit $V \subset \Omega$ ouvert. Fixons $a \in V$ et posons $b = f(a)$. On veut montrer que $f(V)$ est un voisinage de b ; autrement dit, on cherche $r > 0$ tel que $D(b, r) \subset V$, ce qui signifie que pour tout $w \in D(b, r)$, on peut trouver $z \in V$ tel que $f(z) = b$.

Par hypothèse, f n'est pas constante. D'après le principe des zéros isolés appliqué à $g(z) = f(z) - b$, on peut donc trouver un disque ouvert D centré en a tel que

$\overline{D} \subset V$ et $f(z) \neq b$ pour tout $z \in \overline{D} \backslash \{a\}$, en particulier pour tout $z \in \partial D$. Alors $\varepsilon := \inf\{|f(z)|;\ z \in \partial D\}$ est *strictement* positif par compacité de ∂D. On va montrer que $r = \varepsilon/2$ convient ; et plus précisément, que pour tout $w_0 \in D(b, \varepsilon/2)$, on peut trouver un point z_0 *dans* D tel que $f(z_0) = w_0$.

Fixons $w_0 \in D(b, \varepsilon/2)$ et posons $g(z) = f(z) - w_0$. Comme $\overline{D}$ est compact, $|g|$ possède un minimum sur $\overline{D}$, atteint en un point z_0. On a en particulier $|g(z_0)| \leqslant |g(a)| = |f(a) - w_0| = |b - w_0| < \varepsilon/2$. D'autre part, si $\xi \in \partial D$ alors

$$\begin{aligned} |g(\xi)| &= |f(\xi) - w_0| \\ &\geqslant |f(\xi) - b| - |b - w_0| \\ &\geqslant \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2\,. \end{aligned}$$

On en déduit que $z_0 \notin \partial D$, i.e. $z_0 \in D$. Comme D est ouvert et $|g(z_0)| \leqslant |g(z)|$ pour tout $z \in D$, cela montre que g possède un *minimum local* en z_0. D'après le corollaire 5.3, on a donc $g(z_0) = 0$, autrement dit $f(z_0) = w_0$. $\square$

Théorème 5.9. ("lemme de Schwarz")
Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$. On suppose qu'on a $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(1) *On a $|f(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et $|f'(0)| \leqslant 1$.*
(2) *S'il existe un point $a \neq 0$ tel que $|f(a)| = |a|$, ou si $|f'(0)| = 0$, alors f est une* ***rotation*** *: $f(z) \equiv \lambda\, z$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1.*

Démonstration. Comme $f(0) = 0$, on peut écrire $f(z) = zg(z)$, pour une certaine fonction g holomorphe sur $\mathbb{D}$. On a de plus $g(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0)$. Fixons $z \in \mathbb{D}$. Si r vérifie $|z| < r < 1$ et si $\xi \in \partial D(0,r)$, alors $|g(\xi)| = \frac{1}{|\xi|}\,|f(\xi)| \leqslant \frac{1}{r}$ puisque $|f(\xi)| \leqslant 1$. D'après le principe du maximum, on a donc $|g(z)| \leqslant \frac{1}{r}$ pour tout r tel que $|z| < r < 1$, d'où $|g(z)| \leqslant 1$ en faisant tendre r vers 1. Ainsi, $|f(z)| = |zg(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et $|f'(0)| = |g(0)| \leqslant 1$.

Si $|f(a)| = |a|$ pour un certain $a \neq 0$, alors $|g(a)| = 1$; et si $|f'(0)| = 1$ alors $|g(0)| = 1$. Dans les deux cas $|g|$ admet un maximum (global) dans le disque $\mathbb{D}$, donc g est constante d'après le principe du maximum. On a ainsi $|g(z)| \equiv \lambda$, où la constante λ est de module 1 puisque $|g|$ atteint la valeur 1. Donc $f(z) \equiv \lambda\, z$ et f est une rotation. $\square$

6. Séries de Laurent

On a vu que toute fonction holomorphe dans un disque $D(a,R)$ se développe en série entière dans ce disque, c'est à dire en série de puissances positives de $(z-a)$. On va maintenant démontrer un résultat analogue pour une fonction holomorphe dans une **couronne** centrée en a, c'est à dire un ensemble du type

$$C(a,r,R) = \{z \in \mathbb{C};\ r < |z-a| < R\}\,,$$

où $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$. Remarquons que les valeurs $r = 0$ et $R = \infty$ sont autorisées. Si $r = 0$, alors $C(a,0,R)$ est le "disque épointé $D(a,R)\backslash\{a\}$; et si $R = \infty$, alors $C(a,r,\infty) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| > r\}$. En particulier, $C(a,0,\infty) = \mathbb{C}\backslash\{a\}$.

Théorème 6.1. *Si f est une fonction holomorphe dans une couronne $C(a,r,R)$, il existe une unique suite de coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que :*

(a) *la série* $S^+(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ *converge pour tout* z *vérifiant* $|z-a| < R$ *et la série* $S^-(z) = \sum_{n<0} c_n(z-a)^n$ *converge pour tout* z *vérifiant* $|z-a| > r$ *;*

(b) *pour tout* $z \in C(a,r,R)$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n\,.$$

De plus, la série $S^+(z)$ *converge normalement sur tout disque* $\{|z-a| \leqslant \rho\}$, $\rho < R$ *et la série* $S^-(z)$ *converge normalement sur tout ensemble du type* $\{|z-a| \geqslant \rho\}$, $\rho > r$. *On dit que les* c_n *sont les* ***coefficients de Laurent*** *de* f *pour la couronne* $C(a,r,R)$, *et que la série* $\sum c_n(z-a)^n$ *est la* ***série de Laurent*** *de* f *pour la couronne* $C(a,r,R)$.

Remarque. Si f se trouve être en fait holomorphe dans le disque $D(a,R)$, alors (par *unicité* des coefficients) son développement de Laurent dans la couronne $D(a,R)\backslash\{a\}$ coïncide avec son développement en série entière dans $D(a,R)$. Autrement dit, on a $c_n = 0$ pour $n < 0$ et $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ si $n \geqslant 0$.

La preuve du théorème 6 utilise le lemme suivant.

LEMME 6.2. *Soit* f *une fonction holomorphe dans la couronne* $C(a,r,R)$. *Pour* $n \in \mathbb{Z}$ *et* $r < \rho < R$, *posons*

$$c_n(\rho) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,\rho)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi\,.$$

Alors $c_n(\rho)$ *ne dépend pas de* ρ.

Démonstration. Si $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, alors la fonction $\xi \mapsto \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}$ est holomorphe au voisinage de la couronne fermée $K = \overline{C}(a,\rho_1,\rho_2)$. D'après le théorème de Cauchy, on a donc $\int_{\partial K} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi = 0$, autrement dit

$$\int_{\partial D(a,\rho_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi - \int_{\partial D(a,\rho_1)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi = 0\,,$$

et donc $c_n(\rho_2) = c_n(\rho_1)$.

□

Preuve du théorème 6.1. (i) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite de coefficients définie par le lemme précédent, $c_n = c_n(\rho)$ pour n'importe quel $\rho \in]r,R[$. On va montrer que la suite (c_n) vérifie (a) et (b), ce qui prouvera la partie "existence" du théorème.

Fixons $z \in C(a,r,R)$ et choisissons ρ_1 et ρ_2 tels que $r < \rho_1 < |z-a| < \rho_2 < R$. D'après la formule de Cauchy appliquée au point z et à la couronne fermée $K = \overline{C}(a,\rho_1,\rho_2)$, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)}\,d\xi \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,\rho_2)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)}\,d\xi - \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,\rho_1)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)}\,d\xi \\ &= F^+(z) - F^-(z)\,. \end{aligned}$$

La suite de la preuve consiste à développer $F^+(z)$ en série de puissances positives de $z-a$ et $F^-(z)$ en série de puissances négatives de $z-a$, exactement comme dans la démonstration du théorème 2.1.

Si $\xi \in \partial D(a,\rho_1)$, i.e. $|\xi - a| = \rho_1$, on écrit

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(\xi - a) - (z - a)} = -\frac{1}{z-a}\,\frac{f(\xi)}{1 - \left(\frac{\xi - a}{z - a}\right)}.$$

Comme $\left|\frac{\xi-a}{z-a}\right| = \frac{\rho_1}{|z-a|} < 1$, on en déduit

$$\begin{aligned}
\frac{f(\xi)}{\xi - z} &= -\frac{f(\xi)}{z-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi - a}{z - a}\right)^k \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{-k}}\,(z-a)^{-k-1} \\
&= -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\,(z-a)^{n},
\end{aligned}$$

où la série converge normalement par rapport à $\xi \in \partial D(a,\rho_1)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
F^-(z) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,\rho_1)}\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(z-a)^n}\,\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi \\
&= -\sum\int \\
&= -\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,\rho_1)}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi\right)(z-a)^n,
\end{aligned}$$

où l'interversion des signes $\sum$ et $\int$ est justifiée par la convergence normale de la série. Par définition des coefficients c_n, cela s'écrit encore

$$F^-(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n\,(z-a)^n. \tag{6.1}$$

Remarquons que la seule propriété de z utilisée pour établir la convergence de la série $\sum_{n<0} c_n(z-a)^n$ est qu'il existe $\rho_1 > r$ tel que $\frac{\rho_1}{|z-a|} < 1$; autrement dit que $|z-a| > r$. Par conséquent, cette série converge pour tout z vérifiant $|z-a| > r$.

Pour $\xi \in \partial D(a,\rho_2)$ on écrit cette fois

$$\begin{aligned}
\frac{f(\xi)}{\xi - z} &= \frac{f(\xi)}{(\xi - a) - (z - a)} \\
&= \frac{1}{\xi - a}\,\frac{f(\xi)}{1 - \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)}
\end{aligned}$$

et on développe $\frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)}$ en série : $\frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^n}$, ce qui est possible puisque $\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| = \frac{|z-a|}{\rho_2} < 1$. Le même calcul que plus haut donne alors

$$F^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n\,, \tag{6.2}$$

où la série converge en fait pour tout z vérifiant $|z-a| < R$.

En combinant (6.2) et (6.1), on obtient donc finalement

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n.$$

(ii) La convergence normale des deux séries $S^+(z)$ et $S^-(z)$ est claire, car ce sont des séries entières en $u = z-a$ et $v = \frac{1}{z-a}$ respectivement, qui convergent en tout point des disques $\{|u| < R\}$ et $\{|v| < 1/r\}$.

(iii) Montrons maintenant l'unicité. Supposons qu'on puisse écrire

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k (z-a)^k\,,$$

où la série $\sum_{k\geqslant 0} d_k(z-a)^k$ converge pour $|z-a| < R$ et la série $\sum_{k<0} d_k(z-a)^k$ converge pour $|z-a| > r$. Si $r < \rho < R$ alors les deux séries convergent normalement sur le cercle $\{|z-a| = \rho\}$ car ce sont des séries entières en $u = z-a$ et $v = \frac{1}{z-a}$ qui convergent pour $|u| < R$ et $|v| < 1/r$. On peut donc écrire, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k \times \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,\rho)} (z-a)^{k-n-1}\,dz\,. \end{aligned}$$

De plus, si $p \in \mathbb{Z}$ et $p \neq -1$ alors $\int_{\partial D(a,\rho)} (z-a)^p\,dz = \frac{1}{p+1}\int_{\partial D(a,\rho)} d((z-a)^{p+1}) = 0$ car $\partial D(a,\rho)$ est une courbe fermée ; et si $p=-1$ alors $\int_{\partial D(a,\rho)} (z-a)^{-1}dz = \int_{\partial D(0,\rho)} \frac{du}{u} = 2i\pi$. Dans la somme précédente, tous les termes sont donc nuls sauf celui correspondant à $k-n-1 = -1$ (i.e. $k = n$) qui vaut $d_n \times \frac{1}{2i\pi} \times 2i\pi = d_n$. On a donc $d_n = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui termine la démonstration. $\square$

Corollaire 6.3. (décomposition de Laurent)
Si f est une fonction holomorphe dans une couronne $C = C(a,r,R)$, alors il existe une fonction f^+ holomorphe dans $D(a,R)$ et une fonction f^- holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\overline{D}(a,r)$ vérifiant $\lim_{|z|\to\infty} f^-(z) = 0$, telles que $f \equiv f^+ - f^-$ dans C. De plus, une telle décomposition est unique.

Démonstration. Pour l'existence, il suffit de poser $f^+(z) = \sum_0^\infty c_n(z-a)^n$ et $f^-(z) = -\sum_{-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$, où les c_n sont les coefficients de Laurent de f dans la couronne C. Comme la série $\sum_{n<0} c_n(z-a)^n$ est une série entière en $v = \frac{1}{z-a}$ sans terme constant, on a bien $\lim_{|z|\to\infty} f^-(z) = \lim_{v\to 0} f^-(1/v) = 0$.

Pour l'unicité, supposons qu'on ait deux couples (f_1^+, f_1^-) et (f_2^+, f_2^-) vérifiant les propriétés requises. Alors $\phi^- = f_1^- - f_2^-$ est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\overline{D}(a,r)$ et coïncide dans $C(a,r,R)$ avec $\phi^+ = f_1^- - f_2^-$, qui est holomorphe dans $D(a,R)$. On peut donc définir sans ambiguité une fonction *entière* ϕ en posant $\phi(z) = \phi^-(z)$ si $|z-a| > r$ et $\phi(z) = \phi^+(z)$ si $|z-a| < R$. De plus, f_1^- et f_2^- tendent vers 0 à l'infini, donc ϕ également. D'après le théorème de Liouville, ϕ est identiquement nulle, donc $f_1^- = f_2^-$ et $f_1^+ = f_2^+$. $\square$

Proposition 6.4. (Calcul des coefficients de Laurent)
Soit f une fonction holomorphe dans une couronne $C = C(a,r,R)$, et notons c_n ses coefficients de Laurent pour la couronne C.

(1) *Les coefficients c_n sont donnés par la formule*
$$c_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,\rho)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi$$
pour n'importe quel ρ tel que $r<\rho<R$.

(2) *Pour $\rho\in]r,R[$, notons $f_\rho:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ la fonction (continue) 2π-périodique définie par $f_\rho(\theta)=f(a+\rho e^{i\theta})$. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a*
$$c_n\rho^n = \widehat{f_\rho}(n) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})\,e^{-in\theta}d\theta\,.$$

Démonstration. (1) a été vu dans la démonstration du théorème 6.1.

Pour (2), une preuve consiste à écrire $f_\rho(\theta)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k\rho^k\,e^{ik\theta}$ et à calculer $\widehat{f_\rho}(n)$ en intégrant terme à terme. (Détails laissés en exercie). On peut aussi calculer c_n en paramétrant le cercle $\partial D(a,\rho)$ par $z=a+\rho e^{i\theta}$: cela donne
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\rho e^{i\theta})}{((a+\rho e^{i\theta})-a)^{n+1}}\,i\rho e^{i\theta}\,d\theta \\ &= \frac{\rho^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})\,e^{-in\theta}d\theta\,. \end{aligned}$$
□

Remarque. Pour déterminer un développement en série de Laurent dans une couronne centrée en a, une stratégie souvent efficace est la suivante : on exprime tout en fonction de $u=z-a$ et on essaye de se ramener à des expressions du type $\frac{1}{1-cu}$ avec $|cu|<1$ ou $\frac{1}{1-(c/u)}$ avec $|c/u|<1$.

Cherchons par exemple les développements en série de Laurent de $f(z)=\frac{1}{z^2-4}$ dans les couronnes $C_2=\{0<|z-2|<4\}$ et $C_{-2}=\{0<|z+2|<4\}$.

Pour $z\in C_2$, on écrit
$$\begin{aligned} f(z)=\frac{1}{(z-2)(z+2)} &= \frac{1}{z-2}\times\frac{1}{4+(z-2)} \\ &= \frac{1}{4(z-2)}\times\frac{1}{1+\frac{z-2}{4}} \\ &= \frac{1}{4(z-2)}\times\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z-2}{4}\right)^k \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+2}}\,(z-2)^n\,. \end{aligned}$$
Pour $z\in C_{-2}$, le raisonnement est analogue et les détails laissés en exercice.

Application. Singularités "éliminables".

Comme illustration de l'existence du développement de Laurent, on va démontrer l'important résultat suivant. (On parlera plus en détails des "singularités isolées" d'une fonction holomorphe dans la prochaine section).

Proposition 6.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $a\in\Omega\in\mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur $\Omega\backslash\{a\}$. On suppose que f est* ***bornée*** *au voisinage de a. Alors f se* *prolonge en une fonction holomorphe sur Ω. On dit que le point a est une **singularité éliminable** pour f.*

Démonstration. Choisissons $r > 0$ et une constante M tels que $D(a,r) \subset \Omega$ et $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in D(a,r)\backslash\{a\}$. D'après le théorème 6.1, on peut développer la fonction f en série de Laurent dans la *couronne* $D(a,r)\backslash\{a\} = \{0 < |z-a| < r\}$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n\,.$$

On sait que pour tout $\rho \in]0,r[$, on a $c_n\rho^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})\,e^{-in\theta}d\theta$. Comme de plus $|f(a+\rho e^{i\theta})| \leqslant M$ sur $[0,2\pi]$, on a donc $\left|\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})\,e^{-in\theta}d\theta\right| \leqslant 2\pi M$, et par suite

$$|c_n| \leqslant M\,\rho^{-n}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Si $n < 0$, on en déduit $|c_n| \leqslant 0$ en faisant tendre ρ vers 0. Ainsi, on a $c_n = 0$ pour tout $n < 0$. Par conséquent :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n$$

pour tout $z \in D(a,r)\backslash\{a\}$. La série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ converge en tout point de $D(a,r)\backslash\{a\}$, et aussi bien sûr pour $z = a$; elle définit donc une fonction holomorphe $g : D(a,r) \to \mathbb{C}$ qui coïncide avec f sur $D(a,r)\backslash\{a\}$ par définition. Si maintenant on pose $\widetilde{f}(a) = g(a)$ et $\widetilde{f}(z) = f(z)$ pour $z \neq a$, alors $\widetilde{f}$ est holomorphe sur $\Omega\backslash\{a\}$ et aussi au voisinage de a car $\widetilde{f} \equiv g$ sur $D(a,r)$. Donc $\widetilde{f} \in H(\Omega)$, et $\widetilde{f}$ prolonge f par définition. □

Corollaire 6.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $a \in \Omega$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction **continue** sur Ω et holomorphe **sur** $\Omega\backslash\{a\}$, alors f est holomorphe sur Ω.*

Démonstration. Par continuité, f est bornée au voisinage de a, donc a est une singularité éliminable pour $f_{|\Omega\backslash\{a\}}$. Il existe ainsi une fonction $\widetilde{f}$ holomorphe sur Ω qui coïncide avec f sur $\Omega\backslash\{a\}$. Par continuité, on a aussi $\widetilde{f}(a) = f(a)$, donc $f = \widetilde{f}$ et par suite f est holomorphe sur Ω. □

7. Singularités ; fonctions méromorphes

7.1. Classification des singularités. Dans ce qui suit, on appellera **voisinage épointé** d'un point $a \in \mathbb{C}$ un ensemble du type $W\backslash\{a\}$, où W est un voisinage ouvert de a. Par exemple, un disque épointé $D(a,R)\backslash\{a\} = \{0 < |z-a| < R\}$ est un voisinage épointé de a.

Définition 7.1. *Soit $a \in \mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de a.*

(1) *On dit que le point a est une **singularité éliminable** pour f s'il existe un voisinage ouvert V de a et une fonction $\widetilde{f}$ holomorphe sur V tels que $\widetilde{f}(z) = f(z)$ pour tout $z \in V\backslash\{a\}$.*

(2) *Soit p un entier $\geqslant 1$. On dit que a est un **pôle de multiplicité** p pour f si on peut écrire $f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$, où u est holomorphe au voisinage de a avec $u(a) \neq 0$, et v est holomorphe au voisinage de a avec un zéro de multiplicité p en a.*

(3) *On dit que a est une* ***singularité essentielle*** *pour f si a n'est ni une singularité éliminable, ni un pôle pour f.*

Remarques.

(i) Si a est une singularité éliminable pour f, alors la fonction f est bornée au voisinage de a.

(ii) Le point a est un pôle de multiplicité p pour f si et seulement si on peut écrire $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p}$ au voisinage de a, où g est holomorphe au voisinage de a et $g(a) \neq 0$.

(iii) Si a est un pôle de multiplicité p, alors il existe une constante $c \neq 0$ telle que $f(z) \sim \frac{c}{(z-a)^p}$ au voisinage de a. En particulier, a ne peut pas être un pôle de multiplicité $p' \neq p$ (de sorte qu'on peut parler de p comme étant **la** multiplicité de a comme pôle de f), et $|f(z)|$ tend vers l'infini quand $z \to a$.

(iv) La définition d'une singularité éliminable est **locale**, mais elle peut se "globaliser" : si f est holomorphe sur $W\backslash\{a\}$, où W est un voisinage ouvert de a, et si a est une singularité éliminable pour f, alors f se prolonge de manière unique en une fonction holomorphe *sur W tout entier.*

Démonstration. La partie (i) est évidente.

La partie (ii) est également "évidente" par définition de la multiplicité d'un zéro : si $f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$ comme dans la définition, on écrit $v(z) = (z-a)^p v_1(z)$ où v_1 est holomorphe au voisinage de a avec $v_1(a) \neq 0$, et on pose $g = v/v_1$ (fonction bien définie au voisinage de a puisque $v_1(a) \neq 0$ et v_1 est continue en a) ; et inversement, si f s'écrit $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p}$ comme dans (2), il suffir de poser $u = g$ et $v(z) = (z-a)^p$.

La partie (iii) découle de (ii) en posant $c = g(a)$.

Pour démontrer (iv), supposons que a soit une singularité éliminable pour f. Soient V un voisinage ouvert de a contenu dans W et $\widetilde{f}_a$ une fonction holomorphe sur V telle que $\widetilde{f}_a(z) = f(z)$ pour tout $z \in V\backslash\{a\}$. On définit une fonction $\widetilde{f} : W \to \mathbb{C}$ en posant $\widetilde{f}(z) = f(z)$ pour $z \neq a$ et $\widetilde{f}(a) = \widetilde{f}_a(a)$. Par définition, la fonction $\widetilde{f}$ prolonge f. Elle est holomorphe sur $W\backslash\{a\}$, et également holomorphe au voisinage de a puisque $\widetilde{f} \equiv \widetilde{f}_a$ sur V. Donc $\widetilde{f}$ est holomorphe sur W. Pour l'unicité, il suffit d'observer que si deux fonctions continues sur W coïncident sur $W\backslash\{a\}$, alors elles prennent la même valeur en a par continuité, et sont donc égales sur tout W.

□

Exercice. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur $\Omega\backslash S$, où S est un fermé de Ω sans point d'accumulation dans Ω. On suppose que chaque point de S est une singularité éliminable pour f. Montrer que f se prolonge de manière unique en une fonction holomorphe sur Ω.

Exemples.

(1) Si $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, alors f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et $a = 0$ est une singularité éliminable pour f.

(2) Si f est une fonction rationnelle, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec $pgcd(P, Q) = 1$, alors f est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash Z(Q)$ et tout point $a \in Z(Q)$ est un pôle pour f, de multiplicité égale à la multiplicité de a comme zéro de Q.

(3) Si $f(z) = e^{1/z}$, alors f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et $a = 0$ est une singularité essentielle pour f.

Démonstration. (1) On a $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, et donc $\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$ pour tout $z \neq 0$. La série entière $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$ converge en tout point $z \in \mathbb{C}$, et définit donc une fonction $\widetilde{f}$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui prolonge f.

(2) C'est clair par définition d'un pôle.

(3) On a $\lim_{x \to 0^+} |f(x)| = +\infty$, donc f n'est pas bornée au voisinage de a et a n'est pas une singularité éliminable. Mais on a aussi $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$, donc $|f(z)|$ ne tend pas vers l'infini quand $z \to a$ et a n'est pas un pôle.

□

Proposition 7.2. *Soit $a \in \mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de a.*

(1) *a est une singularité éliminable pour f si et seulement si f est bornée au voisinage de a.*

(2) *a est un pôle si et seulement si $|f(z)| \to \infty$ quand $z \to a$.*

Démonstration. On a déjà remarqué les implications "triviales" "seulement si". De plus, l'implication non triviale dans (1) a déjà été démontrée : c'est la proposition 6.5. Il reste à démontrer l'implication non triviale dans (2). Dans ce qui suit, on fixe un voisinage ouvert W de a tel que f est holomorphe sur $W \backslash \{a\}$.

Supposons qu'on ait $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$. On peut alors choisir $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset W$ et $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(a,r) \backslash \{a\}$, de sorte que $g(z) = 1/f(z)$ est bien définie et holomorphe sur $D(a,r) \backslash \{a\}$. On a $\lim_{z \to a} g(z) = 0$, donc g est en particulier bornée au voisinage de a. D'après (1), a est une singularité éliminable pour g. On peut donc trouver une fonction $\widetilde{g}$ holomorphe sur $D(a,r)$ telle que $\widetilde{g}(z) = 1/f(z)$ pour tout $z \in D(a,r) \backslash \{a\}$. Alors $a \in Z(\widetilde{g})$ puisque $\widetilde{g}(a) = \lim_{z \to a} g(z) = 0$, et $\widetilde{g}$ n'est pas identiquement nulle sur $D(a,r)$. La multiplicité p de a comme zéro de $\widetilde{g}$ est donc bien définie ; et comme $f(z) = \frac{1}{\widetilde{g}(z)}$ sur $D(a,r) \backslash \{a\}$, le point a est un pôle de multiplicité p pour f. □

Corollaire 7.3. *Supposons que f soit holomorphe sur $W \backslash \{a\}$, où W est un voisinage ouvert de a. Si a est un pôle de multiplicité p pour f, alors on peut trouver une fonction g holomorphe* sur W tout entier *telle que $g(a) \neq 0$ et $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p}$ pour tout $z \in W \backslash \{a\}$.*

Démonstration. On sait que $(z-a)^p f(z)$ admet une limite $c \neq 0$ quand $z \to a$. En particulier, le point a est une singularité éliminable pour $(z-a)^p f(z)$ d'après la proposition précédente. On peut donc trouver une fonction g holomorphe sur W telle que $g(z) = (z-a)^p f(z)$ pour tout $z \in W \backslash \{a\}$; et on a $g(a) = \lim_{z \to a} (z-a)^p f(z) = c \neq 0$. □

Proposition 7.4. ("théorème de Casorati-Weierstrass")
Soit $a \in \mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur un voisinage épointé de a. Si a est une singularité essentielle pour f, alors $f(V \backslash \{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$ pour tout voisinage V de a.

Démonstration. On raisonne par contraposée. Supposons donc que $f(V\backslash\{a\})$ ne soit *pas* dense dans $\mathbb{C}$, pour un certain voisinage V de a : il s'agit de montrer que a est un pôle ou une singularité éliminable pour f.

Fixons un point $w \in \mathbb{C}\backslash\overline{f(V\backslash\{a\})}$. Par définition de l'adhérence, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall z \in V\backslash\{a\} \ : \ |f(z) - w| \geqslant \varepsilon\,.$$

Alors $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ est bien définie, holomorphe et *bornée* sur $V\backslash\{a\}$, donc a est une singularité éliminable pour g. On peut ainsi trouver une fonction $\widetilde{g}$ holomorphe sur V et ne s'annulant pas sur $V\backslash\{a\}$ telle que

$$\forall z \in V\backslash\{a\} \ : \ f(z) - w = \frac{1}{\widetilde{g}(z)}\cdot$$

Si $\widetilde{g}(a) \neq 0$, alors $f(z)$ admet une limite quand $z \to a$ (à savoir $w + \frac{1}{\widetilde{g}(a)}$) donc a est une singularité éliminable ; et si $\widetilde{g}(a) = 0$, alors $|f(z)| \to \infty$ quand $z \to a$, donc a est un pôle. □

Remarque. En fait, un résultat beaucoup plus fort est vrai : si a est une singularité essentielle pour f, alors pour tout voisinage V de a, le complémentaire de $f(V\backslash\{a\})$ dans $\mathbb{C}$ contient au plus un point. C'est le **théorème de Picard**, qu'il n'est pas question de démontrer ici.

Voici pour finir un résultat montrant que la nature d'une singularité peut se "lire" sur le développement de Laurent.

Proposition 7.5. (singularités et développement de Laurent)
Soit f une fonction holomorphe dans un disque épointé $C = D(a,R)\backslash\{a\}$, et notons

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$$

son développement de Laurent dans C.

(1) *a est une singularité éliminable pour f si et seulement si $c_n = 0$ pour tout $n < 0$.*

(2) *a est un pôle si et seulement si il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $c_{-p} \neq 0$ et $c_n = 0$ pour tout $n < -p$.*

(3) *a est une singularité essentielle si et seulement si $c_n \neq 0$ pour une infinité d'entiers $n < 0$.*

Démonstration. (1) Le point a est une singularité éliminable si et seulement si il existe une fonction $\widetilde{f}$ holomorphe sur $D(a,r)$ telle que $\widetilde{f}(z) = f(z)$ pour $z \neq a$. Il revient au même de dire qu'il existe une suite de coefficients $(d_n)_{n\geqslant 0}$ telle que la série $\sum d_n(z-a)^n$ converge dans $D(a,r)$ et

$$\forall z \in C \ : \ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-a)^n\,.$$

Par unicité des coefficients de Laurent, cela signifie qu'on a $c_n = 0$ pour tout $n < 0$.

(2) D'après le corollaire 7.3, a est un pôle si et seulement si il existe un entier $p \geqslant 1$ et une fonction g holomorphe sur $D(a,r)$ telle que $g(a) \neq 0$ et $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p}$

pour $z \neq a$. Il revient au même de dire qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ et une suite de coefficients $(d_n)_{n\geqslant 0}$ avec $d_0 \neq 0$ telle que la série $\sum c_n(z-a)^n$ converge dans $D(a,r)$ et

$$\begin{aligned}\forall z \in C \ : \ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n &= (z-a)^{-p}\sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-a)^n \\ &= \sum_{n=-p}^{\infty} d_{n+p}\,(z-a)^n\,.\end{aligned}$$

Toujours par unicité des coefficients de Laurent, cela signifie qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $c_{-p} \neq 0$ et $c_n = 0$ pour tout $n < -p$.

La partie (3) découle immédiatement de (1) et (2). □

7.2. Fonctions méromorphes. La définition suivante "doit" être connue, mais on n'en fera rien d'intéressant.

DÉFINITION 7.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction **méromorphe sur** Ω est une fonction f définie sur un ouvert de la forme $\Omega\backslash S$ où S est un fermé de Ω sans point d'accumulation dans Ω, holomorphe sur $\Omega\backslash S$, et telle que chaque point $a \in S$ est soit un pôle, soit une singularité éliminable pour f.*

Remarque. L'ensemble S **dépend de la fonction** f. En particulier, $S = \varnothing$ est autorisé, de sorte que toute fonction holomorphe sur Ω est méromorphe sur Ω.

EXEMPLE 7.7. Supposons Ω **connexe**. Si u et v sont deux fonctions holomorphes sur Ω avec $v \neq 0$, alors $f = \frac{u}{v}$ est une fonction méromorphe sur Ω.

Démonstration. La fonction f est définie et holomorphe sur $\Omega\backslash S$, où $S = Z(v)$ est un fermé de Ω sans point d'accumulation dans Ω d'après le principe des zéros isolés. Si $a \in Z(v)$, alors f est un pôle pour f si a n'est pas un zéro de u ou si sa multiplicité comme zéro de v est strictement plus grande que sa multiplicité comme zéro de u, et a est une singularité éliminable si $u = 0$ ou si a est un zéro de u avec une multiplicité supérieure ou égale à sa multiplicité comme zéro de v. Les vérifications sont laissées en exercice. □

Remarque. On peut montrer qu'inversement, toute fonction méromorphe sur un ouvert connexe est le quotient de deux fonctions holomorphes. Ce résultat est très loin d'être évident.

Exercice. Montrer que si l'ouvert Ω est connexe, alors les fonctions méromorphes sur Ω forment un **corps**. Autrement dit, la somme et le produit de deux fonctions méromorphes f et g sont des fonctions méromorphes bien définies, et le *quotient* f/g est une fonction méromorphe bien définie si $g \neq 0$. (La remarque précédente montre que le corps des fonctions méromorphes s'identifie au **corps des fraction** de l'anneau intègre $H(\Omega)$).

Chapitre 4

Primitives, homotopie

Dans ce chapitre, on adopte la convention suivante pour éviter d'écrire trop souvent "$\mathcal{C}^1$ par morceaux" : sauf mention contraire,

tous les chemins sont de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

1. Formes différentielles exactes et localement exactes

DÉFINITION 1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit ω une 1-forme différentielle continue sur Ω. On dit qu'une fonction $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ est une **primitive de** ω **sur** Ω si on a $dF = \omega$; et on dit que ω est **exacte sur** Ω si elle y admet une primitive.*

REMARQUES.

(i) Si ω est exacte sur Ω, alors $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout chemin *fermé* γ dans Ω, d'après le théorème fondamental de l'analyse (voir le chapitre 2, proposition 1.4).

(ii) Supposons que ω s'écrive $\omega = Pdx + Qdy$. Dire que ω est exacte signifie qu'il existe une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $P = \frac{\partial F}{\partial x}$ et $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$. Si de plus ω est de classe $\mathcal{C}^1$, alors F est de classe $\mathcal{C}^2$ et on doit donc avoir

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{1.1}$$

d'après le théorème de Schwarz. Si $\omega = Adz + Bd\overline{z}$, cette condition s'écrit

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial \overline{z}}\,. \tag{1.1}$$

On dira que ω est ***d*-fermée** si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie (1.1).

EXEMPLE 1.2. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue.

(a) La forme $\omega = f(z)dz$ est exacte sur Ω si et seulement si f possède une primitive holomorphe, i.e. il existe une fonction $F \in H(\Omega)$ telle que $F' = f$. Dans ce cas, la fonction f est holomorphe.

(b) La fonction f est holomorphe si et seulement si $\omega = f(z)dz$ est d-fermée.

(c) Si Ω est un **disque** $D(a,R)$, alors $\omega = f(z)dz$ est exacte sur Ω *si et seulement si* f est holomorphe.

Démonstration. Les parties (a) et (b) sont évidentes. Pour démontrer (c), supposons que f soit holomorphe dans le disque $D(a,R)$. On peut alors développer f en série entière dans $D(a,R)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n\,.$$

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{c_n}{n+1}\, w^{n+1}$ a un rayon de convergence au moins égal à R, et la fonction F définie par

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}\,(z-a)^{n+1}$$

est une primitive holomorphe de f sur $D(a, R)$. □

Exemple 1.3. Soit $\omega = \frac{dz}{z}$, définie sur $\Omega = \mathbb{C}^*$.

(a) ω est d-fermée, mais n'est pas exacte sur $\mathbb{C}^*$.

(b) ω est exacte sur tout ouvert du type $W = \mathbb{C}\backslash\Delta$, où Δ est une demi-droite d'origine 0.

Démonstration. (a) ω est d-fermée puisque $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe. D'autre part, en notant $\mathbb{D}$ le disque unité $\{|z| < 1\}$ on a $\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$, donc ω n'est pas exacte puisque $\partial\mathbb{D}$ est une courbe fermée.

(b) On sait qu'il existe une détermination holomorphe du logarithme sur W. En notant L une telle détermination, on a $L'(z) = \frac{1}{z}$ et donc $dL = \omega$. □

Définition 1.4. *Soit ω une 1-forme différentielle continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. On dit que ω est* ***localement exacte*** *si pour tout point $a \in \Omega$, on peut trouver un voisinage ouvert V_a de a tel que ω est exacte sur V_a.*

Remarque. Évidemment, toute forme exacte est localement exacte puisqu'on peut prendre $V_a = \Omega$ pour tout $a \in \Omega$.

Exemple 1.5. Une 1-forme du type $\omega = f(z)dz$ est localement exacte si et seulement si la fonction f est holomorphe.

Démonstration. Si $\omega = f(z)dz$ est localement exacte, alors f est localement holomorphe et donc holomorphe. Inversement, on a vu que si f est holomorphe, alors f possède des primitives holomorphes dans tout disque $D(a, r) \subset \Omega$, donc $\omega = f(z)dz$ est localement exacte. □

Le résultat suivant donne des caractérisations de l'exactitude et de l'exactitude locale en termes d'intégrales curvilignes.

Théorème 1.6. *Soit ω une 1-forme continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$.*

(1) *ω est exacte sur Ω si et seulement si on a $\int_\gamma \omega = 0$* ***pour tout chemin fermé*** *γ dans Ω.*

(2) *ω est localement exacte si et seulement si on a $\int_{\partial R} \omega = 0$* ***pour tout rectangle*** *$R \subset \Omega$ à côtés parallèles aux axes de coordonnées. Dans ce cas, ω est exacte sur tout disque $D(a, r) \subset \Omega$.*

La démonstration utilise trois lemmes. On rappelle que si $p, q \in \mathbb{C}$, on désigne par $[pq]$ le segment $[p, q]$ orienté de p vers q.

Lemme 1.7. *Soit ω une 1-forme continue sur un ouvert $W \subset \mathbb{C}$, et soit $p \in W$. On suppose qu'il existe une famille $(\gamma_z)_{z\in W}$ de chemins dans W vérifiant les propriétés suivantes.*

(a) *Pour tout $z \in W$, le chemin γ_z a pour origine p et pour extrémité z.*

(b) *Pour tout segment horizontal ou vertical* $[u,v] \subset W$, *on a*

$$\int_{\gamma_v} \omega = \int_{\gamma_u} \omega + \int_{[uv]} \omega\,.$$

Alors ω *est exacte sur* W. *Plus précisément, la fonction* F *définie par* $F(z) = \int_{\gamma_z} \omega$ *est une primitive de* ω *sur* W.

Démonstration. Écrivons $\omega = Pdx + Qdy$. Comme les fonctions P et Q sont continues, il suffit de montrer que $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ existent en tout point de W, avec $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$.

Fixons $z_0 = (x_0, y_0) \in W$ et choisissons $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset W$. Si $z \in W$ vérifie $|z - z_0| < r$, alors $[z_0, z] \subset D(z_0, r) \subset W$; et si le segment $[z_0, z]$ est vertical ou horizontal, alors $F(z) = F(z_0) + \int_{[z_0,z]} \omega$ par hypothèse. Par conséquent, si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $|x - x_0| < r$, alors

$$\begin{aligned} F(x, y_0) &= F(x_0, y_0) + \int_{[(x_0,y_0)(x,y_0)]} Pdx + Qdy \\ &= F(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\, dt\,; \end{aligned}$$

et de même, si $y \in \mathbb{R}$ et $|y - y_0| < r$, alors

$$F(x_0, y) = F(x_0, y_0) + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, u)\, du\,.$$

Comme P et Q sont continues, on en déduit (d'après le théorème fondamental de l'analyse) que $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent et valent respectivement $P(x_0, y_0)$ et $Q(x_0, y_0)$. $\square$

Lemme 1.8. ("lemme de Lebesgue")
Soit K *un compact de* $\mathbb{C}$, *et soit* $(V_i)_{i\in I}$ *une famille d'ouverts de* $\mathbb{C}$ *telle que* $K \subset \bigcup_{i\in I} V_i$. *Alors on peut trouver* $\varepsilon > 0$ *vérifiant la propriété suivante : tout ensemble* $A \subset K$ *de diamètre inférieur à* ε *est contenu dans un* V_i. *On dit que* ε *est un* ***nombre de Lebesgue*** *pour* K *associé au recouvrement ouvert* $(V_i)_{i\in I}$.

Démonstration. (Ce lemme doit figurer dans tout cours raisonnable de topologie...) Supposons que la conclusion soit fausse. On peut alors trouver une suite A_n de parties de K telle que $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$ et A_n n'est contenu dans aucun V_i, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Choisissons pour chaque n un point $x_n \in A_n$. Comme K est compact, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que la suite (x_n) converge vers un point $a \in K$. Comme $K \subset \bigcup_i V_i$, on peut trouver un indice i tel que $a \in V_i$, puis $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset V_i$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{diam}(A_n) < r/2$ et $|x_n - a| < r/2$. comme $x_n \in A_n$, on voit immédiatement en faisant un dessin et en utilisant l'inégalité triangulaire qu'on a $A_n \subset D(a, r)$. Donc $A_n \subset V_i$, ce qui contredit le choix de A_n. $\square$

Lemme 1.9. (lemme de quadrillage)
Soit $R \subset \mathbb{C}$ *un rectangle fermé, et soit* $(R_1, \dots, R_N)$ *un "quadrillage" de* R *en rectangles fermés. Si* ω *est une* 1*-forme continue sur un ouvert contenant* R, *alors*

$$\int_{\partial R} \omega = \sum_{k=1}^{N} \int_{\partial R_k} \omega\,.$$

Démonstration. Si deux rectangles R_i et R_j ont un côté commun L_{ij}, alors L_{ij} est parcouru en sens inverse selon qu'on suit ∂R_i ou ∂R_j, donc les deux intégrales de ω sur L_{ij} se détruisent si on ajoute $\int_{\partial R_i} \omega$ et $\int_{\partial R_j} \omega$. On en déduit immédiatement (par récurrence) qu'on a

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\partial R_k} \omega = \int_{\partial (R_1 \cup \cdots \cup R_n)} \omega$$

pour tout $n \leqslant N$, d'où le résultat puisque $R_1 \cup \cdots \cup R_N = R$. □

Remarque. On a énoncé le lemme pour un quadrillage de R, mais en fait la conclusion vaut encore pour une **subdivision** quelconque de R, c'est-à-dire une suite finie de rectangles $(R_1, \ldots, R_n)$ telle que $R = \bigcup_k R_k$ et les R_k sont d'intérieurs deux-à-deux disjoints. Un quadrillage est une subdivision d'un type particulier obtenue ... en quadrillant le rectangle R, i.e. en traçant des droites verticales et horizontales.

Preuve du théorème 1.6. (1) On a déjà vu que si ω est exacte, alors $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout chemin fermé γ dans Ω. Inversement, supposons cette propriété vérifiée. Pour montrer que ω est exacte, on se ramène au cas où Ω est connexe en considérant séparément chaque composante connexe de Ω. On sait qu'alors Ω est **connexe par arcs polygonaux**. Si on fixe un point $p \in \Omega$, on peut donc choisir pour tout point $z \in \Omega$ un chemin γ_z joignant p à z dans Ω. Si $[u, v]$ est un segment quelconque contenu dans Ω, alors le chemin "γ_u suivi de $[uv]$ suivi du chemin inverse $\check{\gamma}_v$" est un chemin fermé dans Ω. (Voir l'Exercice 1.9 du Chapitre 2 pour la définition précise de "γ_1 suivi de γ_2".) On a donc $\int_{\gamma_u} \omega + \int_{[uv]} \omega - \int_{\gamma_v} \omega = 0$, i.e. $\int_{\gamma_v} \omega = \int_{\gamma_u} \omega + \int_{[uv]} \omega$. D'après le Lemme 1.7, on en déduit que ω est exacte sur Ω.

(2) Supposons que ω soit localement exacte, et fixons un rectangle $R \subset \Omega$. Tout point $z \in R$ possède un voisinage ouvert V_z tel que ω est exacte sur V_z. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre de Lebesgue pour R associé au recouvrement ouvert $(V_z)_{z \in R}$, et soit $(R_k)_{k=1}^{N}$ un quadrillage de R en rectangles R_k de diamètre inférieur à ε. Alors ω est exacte au voisinage de chaque rectangle R_k par définition de ε, et donc $\int_{\partial R_k} \omega = 0$. D'après le lemme 1.9, on a donc

$$\int_{\partial R} \omega = \sum_{k=1}^{N} \int_{\partial R_k} \omega = 0 \, .$$

Inversement, supposons qu'on ait $\int_{\partial R} \omega = 0$ pour tout rectangle $R \subset \Omega$, et montrons que ω est exacte sur tout disque $D(a, r) \subset \Omega$. Écrivons $a = (x_a, y_a)$. Pour $z = (x, y) \in D(a, r)$, notons R_z le rectangle à côtés parallèles aux axes de coordonnées ayant $[a, z]$ pour diagonale, p_z le sommet (x, y_a) de ce rectangle, et γ_z le chemin "$[ap_z]$ suivi de $[p_z z]$". Il s'agit bien d'un chemin dans $D(a, r)$ car le rectangle R_z est contenu dans le disque $D(a, r)$ (*faire un dessin*). Si $[u, v] \subset D(a, r)$ est un segment vertical, alors$\int_{\gamma_v} \omega = \int_{\gamma_u} \omega + \int_{[uv]} \omega$ par définition de γ_u et γ_v. Si $[u, v]$ est un segment horizontal, alors

$$\int_{\gamma_v} \omega = \int_{\gamma_u} \omega + \int_{[up_u]} + \int_{[p_u p_v]} \omega + \int_{[p_v v]} \omega \, .$$

Mais l'intégrale de ω sur le bord du rectangle $R = u p_u p_v v$ est nulle car ce rectangle est contenu dans $D(a, r)$, donc dans Ω. On a donc $\int_{[up_u]} + \int_{[p_u p_v]} \omega + \int_{[p_v v]} \omega = \int_{[uv]} \omega$, d'où à nouveau $\int_{\gamma_v} \omega = \int_{\gamma_u} \omega + \int_{[uv]} \omega$. D'après le lemme 1.7, on en déduit que ω est exacte sur $D(a, r)$. □

COROLLAIRE 1.10. *Une* 1*-forme* ***de classe*** $\mathcal{C}^1$ *est localement exacte si et seulement si elle est d-fermée.*

Démonstration. On a déjà vu que toute 1-forme $\mathcal{C}^1$ et localement exacte est d-fermée. Inversement, si $\omega = Pdx + Qdy$ est d-fermée sur Ω, alors $\int_{\partial R} \omega = 0$ pour tout rectangle $R \subset \Omega$ d'après la formule de Green-Riemann, donc ω est localement exacte par le théorème. $\square$

COROLLAIRE 1.11. ("lemme de Poincaré")
Une 1*-forme d-fermée est exacte sur tout disque ouvert contenu dans son domaine de définition.*

Exercice. Montrer qu'une 1-forme ω est localement exacte si et seulement si on a $\int_{\partial\Delta} \omega = 0$ pour tout *triangle* Δ contenu dans son domaine de définition.

2. Les théorèmes de Morera et Cauchy-Goursat

2.1. Morera. Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème 1.6 ; mais vu son importance historique et son utilité, il est bon de l'énoncer séparément.

THÉORÈME 2.1. ("théorème de Morera")
Soit f une fonction ***continue*** *sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose qu'on a $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$ pour tout rectangle $R \subset \Omega$ à côtés parallèles aux axes de coordonnées. Alors f est holomorphe.*

Démonstration. D'après le théorème 1.6, la 1-forme $\omega = f(z)dz$ est localement exacte. $\square$

Remarque. La subtilité de l'énoncé vient du fait que la fonction f n'est pas supposée de classe $\mathcal{C}^1$, mais seulement continue.

L'application la plus spectaculaire du théorème de Morera est le "théorème de Cauchy-Goursat", qu'on démontrera dans la prochaine sous-section. Voici une autre illustration.

PROPOSITION 2.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On suppose que f est continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \backslash L$, où L est une droite de $\mathbb{C}$. Alors f est holomorphe sur Ω.*

Démonstration. (i) On peut supposer que la droite L est l'axe réel. En effet, on peut trouver une similitude affine $s(z) = az + b$ telle que $s(L) = \mathbb{R}$. Comme s^{-1} est aussi une similitude et est donc holomorphe, la fonction $\widetilde{f}(z) := f(s^{-1}(z))$ est alors continue sur $\widetilde{\Omega} = s(\Omega)$ et holomorphe sur $\widetilde{\Omega}\backslash\mathbb{R}$. Si on sait montrer que $\widetilde{f}$ est holomorphe sur $\widetilde{\Omega}$, alors on aura montré que $f = \widetilde{f} \circ s$ est holomorphe sur Ω.

(ii) On suppose donc que $L = \mathbb{R}$. Pour montrer que f est holomorphe, il suffit (d'après Morera) de vérifier qu'on a $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ pour tout rectange $R \subset \Omega$ à côtés parallèles aux axes de coordonnées. On distingue trois cas.

CAS 1. R ne rencontre pas l'axe réel, i.e. $R \subset \Omega\backslash\mathbb{R}$.

Dans ce cas, on a $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ par le théorème de Cauchy puisque f est holomorphe sur $\Omega\backslash\mathbb{R}$.

CAS 2. R a un côté sur l'axe réel.

Supposons par exemple que le côté horizontal inférieur de R soit soit sur l'axe réel. Pour $\varepsilon > 0$, notons R_ε le rectangle $R + i\varepsilon$. Alors R_ε ne rencontre pas l'axe réel, donc $\int_{\partial R_\varepsilon} f(z)dz = 0$ d'après le cas 1. De plus, comme f est continue, on vérifie que $\int_{\partial R_\varepsilon} f(z)dz$ tend vers $\int_{\partial R} f(z)dz$ quand ε tend vers 0 (détails laissés en exercice). On a donc bien $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$.

Cas 3. R "traverse" l'axe réel.

Dans ce cas, on a $R = R_1 \cup R_2$, où R_1 et R_2 ont un côté commun sur l'axe réel. D'après le lemme de quadrillage 1.9 et le cas 2, on a donc $\int_{\partial R} f(z)dz = \int_{\partial R_1} f(z)dz + \int_{\partial R_2} f(z)dz = 0$. □

Comme conséquence, on retrouve un résultat déjà démontré au Chapitre 3 (corollaire 6.6) :

Corollaire 2.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $a \in \Omega$. Si f est une fonction continue sur Ω et holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{a\}$, alors f est holomorphe sur Ω.*

Démonstration. Prendre n'importe quelle droite L passant par a. □

Une autre conséquence est un cas particulier de ce qu'on appelle le **principe de réflection**.

Corollaire 2.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ symétrique par rapport à l'axe réel, et posons $\Omega^+ = \{z \in \Omega;\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Si $f = \Omega^+ \cup (\mathbb{R} \cap \Omega) \to \mathbb{C}$ est une fonction continue sur $\Omega^+ \cup (\mathbb{R} \cap \Omega)$, holomorphe sur Ω^+ et telle que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \cap \Omega$, alors f peut se prolonger en une fonction holomorphe sur Ω.*

Démonstration. Posons $\Omega^- = \{z \in \Omega;\ \mathrm{Im}(z) < 0\}$, et notons $\widetilde{f} : \Omega \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \Omega^+ \cup (\mathbb{R} \cap \Omega) \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{si } z \in \Omega^- \cup (\mathbb{R} \cap \Omega) \end{cases}$$

Comme $f(z) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \mathbb{R} \cap \Omega$, cette définition est non-ambigüe ; et comme f est continue sur $\overline{\Omega^+}$, on voit que $\widetilde{f}$ est continue sur Ω. De plus, $\widetilde{f}$ est holomorphe sur Ω^+, et on vérifie sans difficulté qu'elle est également holomorphe sur Ω^- (par exemple en calculant $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \bar{z}}$) ; autrement dit, f est holomorphe sur $\Omega\setminus\mathbb{R}$. D'après le corollaire précédent, la fonction $\widetilde{f}$ est donc holomorphe *sur* Ω, et $\widetilde{f}$ prolonge f par définition. □

2.2. Cauchy-Goursat. Le résultat suivant montre que dans la définition de l'holomorphie, il est en fait inutile de supposer que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 2.5. ("théorème de Cauchy-Goursat")
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction $\mathbb{C}$-dérivable en tout point, alors f est holomorphe (et donc infiniment $\mathbb{C}$-dérivable).

Démonstration. Comme f est continue, il suffit (d'après Morera) de montrer qu'on a $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$ pour tout rectangle $R \subset \Omega$. Fixons un tel rectangle R, et posons $\alpha := \left|\int_{\partial R} f(z)\,dz\right|$. Il s'agit de montrer que $\alpha = 0$.

Posons $R_0 = R$, et quadrillons le rectangle R_0 en 4 rectangles R^1, R^2, R^3, R^4 deux fois plus petits en traçant les médianes des côtés de R_0. D'après le lemme de quadrillage 1.9, on a

$$\int_{\partial R_0} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial R^k} f(z)\,dz\,,$$

et donc

$$\alpha \leqslant \sum_{k=1}^{4} \left| \int_{\partial R^k} f(z)\, dz \right| .$$

On peut donc trouver $k_0 \in \{1, \ldots, 4\}$ tel que $\left| \int_{\partial R^{k_0}} f(z)\, dz \right| \geqslant \frac{1}{4}\alpha$. On pose alors $R_1 = R^{k_0}$. Ainsi, on a

$$\begin{cases} R_1 \subset R_0 = R \\ \mathrm{diam}(R_1) = 2^{-1}\mathrm{diam}(R) \\ l(\partial R_1) = 2^{-1} l(\partial R) \\ \left| \int_{\partial R_1} f(z)\, dz \right| \geqslant 4^{-1}\, \alpha \end{cases}$$

Si on répète ce raisonnement en remplaçant R_0 par R_1, on obtient un rectangle $R_2 \subset R_1$, auquel on peut à nouveau applique le même raisonnement et ainsi de suite. De cette façon, on construit par récurrence une suite de rectangles fermés $(R_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} R_{n+1} \subset R_n \\ \mathrm{diam}(R_n) = 2^{-n}\mathrm{diam}(R) \\ l(\partial R_n) = 2^{-n} l(\partial R) \\ \left| \int_{\partial R_n} f(z)\, dz \right| \geqslant 4^{-n}\, \alpha \end{cases}$$

D'après le théorème des fermés emboités, l'intersection de tous les rectangles R_n est non vide, réduite à un point $\{a\}$. Ce point a appartient à $R_0 = R$, donc à Ω ; donc f est $\mathbb{C}$-dérivable en a. Posons $\lambda = f'(a)$, et écrivons

$$f(z) = f(a) + \lambda\,(z - a) + v(z)\, .$$

Comme la fonction $z \mapsto f(a) + \lambda(z - a)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (et en fait admet de manière évidente une primitive holomorphe), on a

$$\int_{\partial R_n} (f(a) + \lambda(z - a))\, dz = 0\, ,$$

donc $\int_{\partial R_n} f(z)\, dz = \int_{\partial R_n} v(z)\, dz$ et donc

$$\left| \int_{\partial R_n} v(z)\, dz \right| \geqslant 4^{-n}\, \alpha \tag{2.1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Par définition de la $\mathbb{C}$-dérivabilité, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $|v(z)| \leqslant \varepsilon\, |z - a|$ pour tout $z \in D(a, \delta)$; et comme $a \in R_n$ et $\mathrm{diam}(R_n) \to 0$, on peut trouver un entier n tel que $R_n \subset D(a, \delta)$. On a alors

$$\left| \int_{\partial R_n} v(z)\, dz \right| \leqslant \int_{\partial R_n} |v(z)|\, |dz| \leqslant \varepsilon \times \mathrm{diam}(R_n) \times l(\partial R_n)\, ,$$

puisque $|v(z)| \leqslant \varepsilon\, |z - a|$ et $|z - a| \leqslant \mathrm{diam}(R_n)$ pour tout $z \in \partial R_n$. Autrement dit :

$$\left| \int_{\partial R_n} v(z)\, dz \right| \leqslant \varepsilon \times 4^{-n}\mathrm{diam}(R)\, l(\partial R)\, . \tag{2.2}$$

En posant $C = \mathrm{diam}(R)\, l(\partial R)$ et en comparant (2.1) et (2.2), on obtient donc finalement

$$\alpha \leqslant C\, \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\alpha = 0$. □

Remarque. Le théorème de Cauchy-Goursat est philosophiquement très satisfaisant et la démonstration est très belle. Mais le résultat ne présente pas un grand intérêt pratique : la plupart du temps, si on sait montrer qu'une fonction est $\mathbb{C}$-dérivable, on sait en général aussi montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ (!)

3. Cauchy-Goursat, Green-Riemann et Kurzweil-Henstock

Comme on l'a vu, l'idée de la preuve du théorème de Cauchy-Goursat est de montrer que si f est une fonction $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω, alors $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$ pour tout rectangle $R \subset \Omega$. Toute la subtilité vient du fait que la fonction f n'est pas supposée de classe $\mathcal{C}^1$: sinon le résultat serait “évident” car on pourrait appliquer directement la formule de Green-Riemann.

Le but de cette section est de montrer qu'en fait, *il est possible d'appliquer la formule de Green-Riemann.* De façon précise, on va établir le résultat suivant.

THÉORÈME 3.1. *Il existe une théorie de l'intégration raisonnable, pour des fonctions définies sur des rectangles, telle que la propriété suivante ait lieu : si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors la formule de Green-Riemann*

$$\int_{\partial R} Pdx + Qdy = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

est valable pour toutes fonctions P et Q différentiables *sur Ω et pour tout rectangle $R \subset \Omega$.*

L'intégrale qu'on va utiliser est une intégrale de type “Riemann” (donc avec des subdivisions et des “sommes de Riemann”), mais beaucoup plus générale. Toute la construction repose sur une sorte de raffinement du lemme de Lebesgue connue sous le nom de **lemme de Cousin**. On va donc commencer par démontrer ce lemme, et on verra immédiatement après comment il permet de “ré-écrire” la preuve du théorème de Cauchy-Goursat donnée plus haut. On définira ensuite l'intégrale, et on pourra alors établir une version très générale de la formule de Green-Riemann sur un rectangle.

3.1. Le lemme de Cousin. Il s'agit du résultat suivant. On l'énonce ici pour des rectangles dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, mais il est valable pour des pavés dans $\mathbb{R}^N$ avec N quelconque (et en particulier pour des segments de $\mathbb{R}$!).

LEMME 3.2. (lemme de Cousin)
Soit R un rectangle (fermé) de $\mathbb{C}$, et supposons donné pour tout $a \in R$ un voisinage ouvert V_a de a dans $\mathbb{C}$. Alors on peut subdiviser R en rectangles $R_1, \dots, R_N$ de sorte que la propriété suivante ait lieu : chaque rectangle R_i est contenu dans un ouvert V_{a_i} avec un point a_i appartenant à R_i. *De plus, on peut imposer que les R_i soient tous* homothétiques *à R.*

Démonstration. Convenons de dire qu'un rectangle $K \subset R$ homothétique à R est *refractaire* s'il est impossible de subdiviser K en rectangles homothétiques ayant la propriété ci-dessus. On va montrer par l'absurde que R n'est pas réfractaire. Le point clé est l'observation suivante :

FAIT. Si un rectangle $K \subset R$ est réfractaire, alors on peut trouver un rectangle réfractaire $K' \subset K$ homothétique à K et tel que $\mathrm{diam}(K') = \frac{1}{2}\mathrm{diam}(K)$.

Preuve du fait. Il suffit de subdiviser (en fait, quadriller) K en 4 rectangles homothétiques deux fois plus petits : si aucun de ces 4 rectangles n'était réfractaire, K ne le serait pas non plus. □

Supposons maintenant que le rectangle R soit réfractaire. En posant $K_0 = R$, le fait permet de construire par récurrence une suite décroissante de rectangles réfractaires $(K_n)_{n\geqslant 0}$ homothétiques à R avec $\mathrm{diam}(K_n) = 2^{-n}\mathrm{diam}(R)$. D'après le théorème des fermés emboités, l'intersection des K_n est non vide et réduite à un point $\{a\}$. On peut alors trouver un entier n tel que $K_n \subset V_a$, et comme $a \in K_n$ cela contredit le caractère réfractaire de K_n. □

3.2. Retour sur Cauchy-Goursat. (Cette sous-section n'est pas strictement indispensable). On va voir ici comment le lemme de Cousin permet de ré-écrire la preuve du théorème de Cauchy-Goursat. Soit donc f une fonction $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω : il s'agit de montrer qu'on a $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$ pour tout rectangle $R \subset \Omega$. Tout repose sur le fait suivant.

Fait. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout point $a \in \Omega$, on peut trouver un voisinage ouvert V_a de a vérifiant la propriété suivante : pour tout rectangle K tel que $a \in K \subset V_a$, on a

$$\left|\int_{\partial K} f(z)\,dz\right| \leqslant \varepsilon\,\mathrm{diam}(K)\,l(\partial K)\,.$$

Démonstration. Fixons $a \in \Omega$. Comme f est $\mathbb{C}$-dérivable en a, on peut trouver un voisinage ouvert V_a de a tel que $|f(z) - L_a(z)| \leqslant \varepsilon\,|z-a|$ pour tout $z \in V_a$, où $L_a(z) = f(a)+(z-a)f'(a)$. Soit K un rectangle tel que $a \in K \subset V_a$. Comme la fonction L_a possède une primitive holomorphe, on a $\int_{\partial K} L_a(z)\,dz = 0$ et donc $\int_{\partial K} f(z)\,dz = \int_{\partial K}(f(z) - L_a(z))\,dz$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial K} f(z)\,dz\right| &\leqslant \int_{\partial K} |f(z) - L_a(z)|\,|dz| \\ &\leqslant \varepsilon \int_{\partial K} |z-a|\,|dz|\,.\end{aligned}$$

Comme de plus le point a appartient à K, on a $|z-a| \leqslant \mathrm{diam}(K)$ pour tout $z \in \partial K$, d'où finalement

$$\left|\int_{\partial K} f(z)\,dz\right| \leqslant \varepsilon\,\mathrm{diam}(K)\,l(\partial K)\,.$$

□

Soit maintenant R un rectangle contenu dans Ω. Notons $|R|$ son aire et posons

$$c = \frac{\mathrm{diam}(R)\,l(\partial R)}{|R|},$$

de sorte que $\mathrm{diam}(R')\,l(\partial R') = c\,|R'|$ pour tout rectangle R' homothétique à R. D'après le fait, le lemme de Cousin et cette propriété de c, on peut pour tout $\varepsilon > 0$, subdiviser R en rectangles $R_1, \ldots, R_N$ tels que

$$\left|\int_{\partial R_k} f(z)\,dz\right| \leqslant c\,\varepsilon\,|R_k|$$

pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$.

Comme $\int_{\partial R} f(z)\,dz = \sum_k \int_{\partial R_k} f(z)\,dz$, on en déduit

$$\left|\int_{\partial R} f(z)\,dz\right| \leqslant c\,\varepsilon \sum_{k=1}^{N} |R_k| = c|R|\,\varepsilon\,,$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Et par conséquent $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$.

3.3. Intégrale "de jauge" sur un rectangle. Dans cette sous-section, on définit la notion d'intégrale dont on a besoin pour la formule de Green-Riemann généralisée. Il faut malheureusement introduire un peu de vocabulaire.

DÉFINITION 3.3. *Soit R un rectangle de $\mathbb{C}$.*

(1) *Une **subdivision pointée** de R est une suite finie $\mathbf{K} = ((K_1, a_1), \dots, (K_N, a_N))$, où $(K_1, \dots, K_N)$ est une subdivision de R en rectangles et $a_j \in K_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$.*

(2) *Une **jauge** sur R est une fonction $\delta : R \to]0, \infty[$. (Autrement dit, la donnée pour tout $a \in R$ d'un nombre $\delta(a) > 0$).*

(3) *Étant donné une jauge δ sur R, on dit qu'une subdivision pointée $\mathbf{K} = ((K_1, a_1), \dots, (K_N, a_N))$ est **δ-fine** si on a $K_j \subset D(a_j, \delta(a_j))$ pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$.*

Il faut un peu de temps pour digérer ces définitions, en particulier la notion de "δ-finesse". Quoi qu'il en soit, avec cette terminologie le lemme de Cousin peut se reformuler comme suit :

LEMME 3.4. *Soit R un rectangle de $\mathbb{C}$. Pour toute jauge δ sur R, il existe une subdivision pointée δ-fine de R constituée de rectangles homothétiques à R.*

Démonstration. Il suffit de poser $V_a = D(a, \delta(a))$ pour tout $a \in R$ et d'appliquer le lemme de Cousin. $\square$

La définition de l'intégrale fait intervenir des **sommes de Riemann**. Si $\varphi : R \to \mathbb{C}$ est une fonction définie sur un rectangle R et si $\mathbf{K} = ((K_1, a_1), \dots, (K_N, a_N))$ est une subdivision pointée de R, la somme de Riemann pour φ associée à $\mathbf{K}$ est le nombre $S(\varphi, \mathbf{K})$ défini comme on s'y attend :

$$S(\varphi, \mathbf{K}) = \sum_{j=1}^{N} \varphi(a_j)\,|K_j|\,,$$

où on a noté $|K_j|$ l'aire du rectangle K_j.

DÉFINITION 3.5. *Soit $\varphi : R \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un rectangle R. On dit que φ est **J-intégrable** sur R s'il existe un nombre complexe I vérifiant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver une jauge δ sur R telle que $|S(\varphi, \mathbf{K}) - I| \leqslant \varepsilon$ pour toute subdivision δ-fine de R constituée de rectangles homothétiques à R. Le nombre I est alors déterminé de manière unique, et on le note $I = \int_R \varphi$.*

Remarque 0. Le fait que I soit déterminé de manière unique se démontre exactement comme l'"unicité de la limite" pour les suites numériques, en utilisant le lemme de Cousin et le fait que si δ_1 et δ_2 sont deux jauges sur R, alors $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ est encore une jauge sur R. C'est un bon exercice "de compréhension".

Remarque 1. La terminologie "J-intégrable" n'est absolument pas standard. (La lettre "J" fait référence au mot "jauge".)

Remarque 2. Si on ne se restreint pas à des subdivisions constituées de rectangles homothétiques à R (i.e. si dans la définition on exige d'avoir $|S(\varphi, \mathbf{K}) - I| < \varepsilon$ pour *toutes* les subdivisions δ-fines de R), on obtient exactement l'intégrale dite de **Kurzweil-Henstock**. Ainsi, toute fonction intégrable au sens de Kurzweil-Henstock est J-intégrable, et son intégrale au sens de Kurzweil-Henstock est égale à sa "J-intégrale".

Remarque 3. Il est clair par définition que les fonctions J-intégrables sur R forment un espace vectoriel et que l'intégrale $\int_R \varphi$ dépend linéairement de φ. Il est également facile de voir que l'intégrale est *croissante* : si φ et ψ sont à valeurs réelles et $\varphi \leqslant \psi$, alors $\int_R \varphi \leqslant \int_R \psi$. En revanche, contrairement à ce qui se passe pour l'intégrale de Lebesgue, il n'est *pas vrai* en général qu'une fonction φ est J-intégrable si et seulement si $|\varphi|$ est J-intégrable.

Exemple. Toute fonction *continue* sur un rectangle R est J-intégrable sur R, et sa "J-intégrale" est égale à son intégrale au sens de Lebesgue.

Démonstration. Soit $\varphi : R \to \mathbb{C}$ une fonction continue ; on va en fait montrer que φ est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock. Pour tout rectangle $K \subset R$, on notera $\int_K \varphi(x,y)\,dxdy$ son intégrale au sens de Lebesgue sur K.

Fixons $\varepsilon > 0$. Par définition de la continuité, on peut pour tout $a \in R$ choisir $\delta(a) > 0$ tel que

$$|z - a| < \delta(a) \implies |\varphi(z) - \varphi(a)| \leqslant \varepsilon$$

On définit ainsi une jauge δ sur R. Si $\mathbf{K} = ((K_1, a_1), \dots, (K_N, a_N))$ est une subdivision pointée δ-fine, alors on a par définition $|\varphi(z) - \varphi(a_j)| \leqslant \varepsilon$ pour tout j et pour tout $z = (x,y) \in K_j$. On en déduit $\left|\int_{K_j} (\varphi(x,y) - \varphi(a_j))\,dxdy\right| \leqslant \int_{K_j} \varepsilon\,dxdy = \varepsilon\,|K_j|$, ce qui s'écrit encore

$$\left|\int_{K_j} \varphi(x,y)\,dxdy - \varphi(a_j)\,|K_j|\right| \leqslant \varepsilon\,|K_j|$$

pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$. D'après l'inégalité triangulaire, on a donc

$$\left|\sum_{j=1}^{N} \int_{K_j} \varphi(x,y)\,dxdy - \sum_{j=1}^{N} \varphi(a_j)\,|K_j|\right| \leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^{N} |K_j|\,,$$

autrement dit

$$\left|\int_R \varphi(x,y)\,dxdy - S(\varphi, \mathbf{K})\right| \leqslant \varepsilon\,|R|\,.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela montre que φ est intégrable au sens de Kurzweil-Hestock sur R, et que son intégrale au sens de Kurzweil-Henstock est égale à son intégrale au sens de Lebesgue $\int_R \varphi(x,y)\,dxdy$.

□

Remarque. Il est également vrai (mais plus délicat à démontrer) que toute fonction *intégrable au sens de Lebesgue* sur R est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock (et donc J-intégrable), et que son intégrale au sens de Kurzweil-Henstock est égale à son intégrale au sens de Lebesgue.

3.4. Dérivée extérieure. La formule de Green-Riemann que l'on a en vue fait intervenir ce qu'on appelle la "dérivée extérieure" d'une forme différentielle. L'objet de cette sous-section est de définir précisément ce qu'on entend par là.

On a d'abord besoin d'introduire quelques notations et un peu de vocabulaire.

- Comme d'habitude, on notera $|K|$ l'aire d'un rectangle $K \subset \mathbb{C}$.
- On appellera **régularité** d'un rectangle K la quantité $r(K) = \frac{|K|}{\text{diam}(K)^2}\cdot$ (Par définition, on a donc $0 < r(K) \leqslant 1$). La signification géométrique de $r(K)$ est la suivante : plus le rectangle K est "aplati", et plus $r(K)$ est petit.
- On utilisera le fait évident suivant : si K et K' sont deux rectangles homothétiques, alors $r(K) = r(K')$.
- Si $a \in \mathbb{C}$, on notera $\mathcal{R}(a)$ la famille de tous les rectangles de $\mathbb{C}$ contenant a.
- Soit $a \in \mathbb{C}$, et soit $\Phi : \mathcal{R}(a) \to \mathbb{C}$. On dit que $\Phi(K)$ **admet une limite quand** K **tend vers** a **sans s'aplatir** s'il existe un nombre complexe l tel que la propriété suivante ait lieu : pour toute suite de rectangles $(K_n) \subset \mathcal{R}(a)$ telle que $\text{diam}(K_n) \to 0$ et $\inf_n r(K_n) > 0$, on a $\lim_{n\to\infty} \Phi(K_n) = l$. Le nombre l est alors déterminé de manière unique (*exercice*) et on écrit $l = \lim\limits_{K\to a} \Phi(K)$.

Définition 3.6. *Soit ω une forme différentielle continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. On dit que ω est **extérieurement dérivable** en un point $a \in \Omega$ si $\frac{1}{|K|}\int_{\partial K} \omega$ admet une limite quand $K \in \mathcal{K}(a)$ tend vers a sans s'aplatir. On pose alors*

$$d\omega(a) = \lim_{K\to a} \frac{1}{|K|}\int_{\partial K} \omega\,,$$

*et on dit que $d\omega(a)$ est la **dérivée extérieure** de ω au point a.*

On ne tentera pas ici d'expliquer la terminologie "dérivée extérieure". En revanche, on va démontrer le lemme suivant, qui est en quelque sorte la "raison d'être" de la définition.

Lemme 3.7. *Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si ω est* différentiable *en un point $a \in \Omega$ (i.e. P et Q sont différentiables en a) alors ω est extérieurement dérivable en a et*

$$d\omega(a) = \frac{\partial Q}{\partial x}(a) - \frac{\partial P}{\partial y}(a)\,.$$

Démonstration. Cela va découler des deux faits suivants.

Fait 1. Si $\mathcal{P}(x,y) = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1$ et $\mathcal{Q}(x,y) = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2$ sont des fonctions *affines* sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (à valeurs complexes), alors

$$\int_{\partial K} \mathcal{P}dx + \mathcal{Q}dy = (\alpha_2 - \beta_1) \times |K| \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y}\right) \times |K|$$

pour tout rectangle $K \subset \mathbb{C}$.

Démonstration. En écrivant $K = [u,u'] \times [v,v']$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} \mathcal{P}dx + \mathcal{Q}dy &= \int_u^{u'} \big(\mathcal{P}(x,v) - \mathcal{P}(x,v')\big)\,dx + \int_v^{v'} \big(\mathcal{P}(u',y) - \mathcal{Q}(u,y)\big)\,dy \\ &= \int_u^{u'} \beta_1(v-v')\,dx + \int_v^{v'} \alpha_2(u'-u)\,dy \\ &= (\alpha_2 - \beta_1) \times (u'-u)(v'-v)\,,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

Remarque. Comme $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, on aurait pu tout aussi bien appliquer ... la formule de Green-Riemann, que l'on vient de redémontrer dans ce cas particulier.

Fait 2. Soit $\eta = pdx + qdy$ une forme différentielle continue sur Ω, et soit $a \in \Omega$. On suppose qu'on a $p(z) = o(|z-a|) = q(z)$ quand $z \to a$. Alors η est extérieurement dérivable en a et $d\eta(a) = 0$.

Démonstration. Par hypothèse, on peut écrire

$$p(z) = (z-a)\varepsilon_p(z) \ \text{ et } \ q(z) = (z-a)\varepsilon_q(z)\,,$$

où $\lim_{z\to a} \varepsilon_p(z) = 0 = \lim_{z\to a} \varepsilon_q(z)$.

Si $K \subset \Omega$ est un rectangle contenant a, alors

$$|p(z)| \leqslant |\varepsilon_p(z)| \times \operatorname{diam}(K) \ \text{ et } \ |q(z)| \leqslant |\varepsilon_q(z)| \times \operatorname{diam}(K)$$

pour tout $z \in K$. En écrivant $K = I \times J$ où I et J sont des segments de $\mathbb{R}$, on en déduit

$$\left|\int_{\partial K} pdx + qdy\right| \leqslant \operatorname{diam}(K) \times \big(2|I|\,\varepsilon_p(K) + 2|J|\,\varepsilon_q(K)\big)\,,$$

où on a posé $\varepsilon_p(K) = \sup_{z\in K} |\varepsilon_p(z)|$ et $\varepsilon_q(K) = \sup_{z\in K} |\varepsilon_q(z)|$. Comme $|I| \leqslant \operatorname{diam}(K)$ et $|J| \leqslant \operatorname{diam}(K)$, on obtient donc

$$\left|\int_{\partial K} \eta\right| \leqslant 2\,(\varepsilon_p(K) + \varepsilon_q(K)) \times \operatorname{diam}(K)^2\,;$$

et par conséquent

$$\left|\frac{1}{|K|}\int_{\partial K} \eta\right| \leqslant \frac{\varepsilon(K)}{r(K)}\,,$$

où $\varepsilon(K) = 2\,(\varepsilon_p(K) + \varepsilon_q(K))$ et $r(K) = \frac{|K|}{\operatorname{diam}(K)^2}$ est la régularité de K. Comme $\varepsilon(K)$ tend vers 0 quand K tend vers a, on en déduit que $\frac{1}{|K|}\int_{\partial K} \eta$ tend vers 0 quand K tend vers a sans s'aplatir ; autrement dit que η est extérieurement dérivable en a avec $d\eta(a) = 0$.

□

La preuve du lemme est maintenant "immédiate". Supposons que $\omega = Pdx + Qdy$ soit différentiable en $a = (x_a, y_a)$. En posant

$$\mathcal{P}_a(x,y) = P(a) + \frac{\partial P}{\partial x}(a)\,(x - x_a) + \frac{\partial P}{\partial y}(a)\,(y - y_a) \quad \text{et}$$
$$\mathcal{Q}_a(x,y) = Q(a) + \frac{\partial Q}{\partial x}(a)\,(x - x_a) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a)\,(y - y_a)\,,$$

on peut alors écrire

$$P(z) = \mathcal{P}_a(z) + p_a(z) \ \text{ et } \ Q(z) = \mathcal{Q}_a(z) + q_a(z)\,,$$

où

$$p_a(z) = o(|z-a|) = q_a(z) \quad \text{quand } \ z \to a\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \omega &= (\mathcal{P}_a dx + \mathcal{Q}_a dy) + (p_a dx + q_a dy) \\ &= (P_a dx + \mathcal{Q}_a dy) + \eta_a\,. \end{aligned}$$

D'après le fait 1, on en déduit

$$\frac{1}{|K|}\int_{\partial K} Pdx + Qdy = \frac{\partial Q}{\partial x}(a) - \frac{\partial P}{\partial y}(a) + \frac{1}{|K|}\int_{\partial K}\eta_a$$

pour tout rectangle $K \subset \Omega$; et d'après le fait 2 on en conclut que $d\omega(a)$ existe et vaut $\frac{\partial Q}{\partial x}(a) - \frac{\partial P}{\partial y}(a)$. □

Exercice. Utiliser le lemme précédent pour démontrer le **théorème de Schwarz**, sous la forme suivante : si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et deux fois différentiable en un point $a \in \Omega$, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$.

Remarque. On dira qu'une forme différentielle ω est ***d*-fermée** si elle est continue, et extérieurement dérivable en tout point avec $d\omega \equiv 0$. Cette terminologie est compatible avec celle introduite au tout début de ce chapitre : en effet, si ω est de classe $\mathcal{C}^1$ ou même seulement différentiable et s'écrit $\omega = Pdx + Qdy = Adz + Bd\bar{z}$, il découle du lemme 3.7 qu'elle est d-fermée si et seulement si $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, ou encore $\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}$. En particulier, une forme différentielle du type $\omega = fdz$ avec f différentiable est d-fermée si et seulement si f vérifie l'équation de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, i.e. f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point.

3.5. Green-Riemann. On a maintenant introduit tous les outils nécessaires à l'énoncé et à la preuve du théorème suivant.

THÉORÈME 3.8. *Soit ω une forme différentielle continue au voisinage d'un rectangle $R \subset \mathbb{C}$. Si ω est extérieurement dérivable en tout point de R, alors $d\omega$ est J-intégrable sur R et*

$$\int_{\partial R}\omega = \int_R d\omega\,.$$

Compte tenu du lemme 3.7 et du fait que la J-intégrale généralise l'intégrale de Lebesgue (c qu'on n'a pas démonré...), on en déduit immédiatement :

COROLLAIRE 3.9. *Si $\omega = Pdx + Qdy$ est* différentiable *sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et si $R \subset \Omega$ est un rectangle tel que la fonction $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur R, alors*

$$\int_{\partial R} Pdx + Qdy = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,.$$

De même, on obtient instantanément la généralisation suivante du théorème de Cauchy-Goursat :

COROLLAIRE 3.10. *Si ω est une forme différentielle d-fermée sur Ω, alors $\int_{\partial R}\omega = 0$ pour tout rectangle $R \subset \Omega$. En particulier, si f est une fonction $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω, alors $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$ pour tout rectangle $R \subset \Omega$.*

Et pour finir, une caractérisation des formes différentielles d-fermées.

COROLLAIRE 3.11. *Soit ω une forme différentielle continue sur Ω. Alors ω est d-fermée* si et seulement si *$\int_{\partial R}\omega = 0$ pour tout rectangle $R \subset \Omega$, ce qui revient à dire que ω est localement exacte.*

Démonstration. Si ω est d-fermée, alors $\int_{\partial R}\omega = 0$ pour tout rectangle $R \subset \Omega$ par "Green-Riemann généralisé" ; et inversement, si cette propriété est vérifiée alors ω est extérieurement dérivable en tout point avec $d\omega = 0$, *par définition.* □

Preuve du théorème. Supposons ω extérieurement dérivable en tout point de R, et fixons $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver une jauge δ sur R telle que

$$\left| S(d\omega, \mathbf{K}) - \int_{\partial R} \omega \right| \leqslant \varepsilon$$

pour toute subdivision pointée δ-fine de R constituée de rectangles homothétiques à R.

Soit $r_0 = \frac{|R|}{\mathrm{diam}(R)^2}$ la régularité du rectangle R, et soit $\varepsilon' > 0$ à choisir ultérieurement. Par définition de la dérivabilité extérieure, on peut pour tout $a \in R$, choisir $\delta(a) > 0$ tel que la propriété suivante ait lieu : pour tout rectangle $K \subset \Omega$ tel que $a \in K \subset D(a\delta(a))$ et $r(K) \geqslant r_0$, on a

$$\left| \int_{\partial K} \omega - |K| \, d\omega(a) \right| \leqslant \varepsilon' \, |K| \, .$$

En particulier, cette inégalité sera satisfaite pour tout rectangle $K \ni a$ homothétique à R tel que $\mathrm{diam}(K) \leqslant 2\delta(a)$.

Le choix de $\delta(a)$ pour tout $a \in R$ définit une jauge δ sur R. On va montrer que cette jauge convient si ε' est assez petit.

Soit $\mathbf{K} = ((K_1, a_1), \ldots, (K_N, a_n))$ une subdivision pointée δ-fine de R constituée de rectangles homothétiques à R. Par définition de la jauge δ et de la "δ-finesse" on a $a_j \in K_j \subset D(a_j, \delta(a_j))$, et donc

$$\left| \int_{\partial K_j} \omega - |K_j| \, d\omega(a_j) \right| \leqslant \varepsilon' \, |K_j|$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$. D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \int_{\partial K_j} \omega - \sum_{j=1}^{N} |K_j| \, d\omega(a_j) \right| \leqslant \varepsilon' \sum_{j=1}^{N} |K_j| \, ,$$

autrement dit

$$\left| \int_{\partial R} \omega - S(d\omega, \mathbf{K}) \right| \leqslant \varepsilon' \, |R| \, ;$$

d'où la conclusion souhaitée en choisissant $\varepsilon' \leqslant \frac{\varepsilon}{|R|}$.

□

4. Homotopie

4.1. Invariance de l'intégrale curviligne par homotopie.

DÉFINITION 4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soient γ_0 et γ_1 deux* ***lacets*** *dans Ω (i.e. deux chemins fermés), paramétrés par le même intervalle $[a, b]$. On dit que γ_0 et γ_1 sont* ***homotopes dans*** *Ω s'il existe une application continue $H : [0, 1] \times [a, b] \to \Omega$ vérifiant les deux propriétés suivantes.*

(a) *Pour tout $s \in [0, 1]$, le chemin $\Gamma_s : [a, b] \to \Omega$ défini par $\Gamma_s(t) = H(s, t)$ est un lacet (*pas nécessairement *de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux).*

(b) $\Gamma_0 = \gamma_0$ *et* $\Gamma_1 = \gamma_1$.

On dit alors que H est une ***homotopie*** *de γ_0 à γ_1.*

REMARQUES.

(o) En termes un peu vagues mais imagés, γ_0 et γ_1 sont homotopes dans Ω si “on peut passer continûment de γ_0 à γ_1 en restant dans Ω”.

(i) On voit immédiatement que si H est une homotopie de γ_0 à γ_1, alors l'application $(s,t)\mapsto H(1-s,t)$ est une homotopie de γ_1 à γ_0. Donc la définition de l'homotopie est symétrique en γ_0 et γ_1, ce qui justifie la terminologie “sont homotopes” (qui est d'emblée symétrique).

(ii) En fait, la relation “être homotopes dans Ω” est une relation d'équivalence. La preuve est laissée en exercice.

(iii) La définition **dépend de l'ouvert** Ω puisque l'homotopie H doit prendre ses valeurs dans Ω.

Exemples.

(1) Tout lacet $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ est homotope **dans** $\mathbb{C}$ à un lacet constant.

(2) Le lacet $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}^*$ défini par $\gamma(t)=e^{it}$ n'est pas homotope **dans** $\mathbb{C}^*$ à un lacet constant.

Démonstration. (1) Fixons un point $p\in\mathbb{C}$. Si on définit $H:[0,1]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ par $H(s,t)=(1-s)\gamma(t)+s\,p$, alors H est une homotopie de γ au lacet constant égal à p.

(2) Le résultat est intuitivement évident : on ne peut pas déformer continûment sur un point un cercle centré en 0 sans passer par 0. Pour une preuve rigoureuse, il faut attendre un peu. □

Exercice. Soient $0<r<R$. Montrer que les lacets définis sur $[0,2\pi]$ par $\gamma_r(t)=re^{it}$ et $\gamma_R(t)=Re^{it}$ sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$.

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 4.2. (invariance de l'intégrale curviligne par homotopie) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si γ_0 et γ_1 sont deux lacets homotopes dans Ω, alors $\int_{\gamma_0}\omega=\int_{\gamma_1}\omega$ pour toute 1-forme **localement exacte** ω sur Ω. En particulier, si γ est un lacet homotope dans Ω à un lacet constant, alors $\int_\gamma\omega=0$.*

Pour la preuve, on a besoin de deux lemmes. Dans ce qui suit, on dira qu'une application continue $H:[c,d]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ définie sur un rectangle $[c,d]\times[a,b]\subset\mathbb{R}^2$ est **séparément $\mathcal{C}^1$ par morceaux** si pour tout $s\in[c,d]$ fixé, le chemin $t\mapsto H(s,t)$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et pour tout $t\in[a,b]$ fixé, le chemin $s\mapsto H(s,t)$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Lemme 4.3. *Si γ_0 et γ_1 sont deux lacets (de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) homotopes dans Ω, alors il existe une homotopie de γ_0 à γ_1 qui est séparément $\mathcal{C}^1$ par morceaux.*

Démonstration. La preuve est un peu technique et ne présente pas un intérêt démesuré. On *admettra* donc le résultat. □

Lemme 4.4. *Soit $R=[c,d]\times[a,b]$ un rectangle de $\mathbb{R}^2$, et soit $H:[c,d]\times[a,b]\to\Omega$ continue et séparément $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit également γ un paramétrage admissible de ∂R. Alors $\int_{H\circ\gamma}\omega=0$ pour toute 1-forme localement exacte ω sur Ω.*

Démonstration. Remarquons d'abord que l'intégrale $\int_{H\circ\gamma}\omega$ est bien définie car $H\circ\gamma$ est un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux, d'après l'hypothèse faite sur H.

Fixons une 1-forme localement exacte ω, et posons $K=H(R)$. L'ensemble K est compact par continuité de H, et tout point $z\in K$ possède un voisinage ouvert V_z sur lequel ω est exacte. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre de Lebesgue pour K associé au recouvrement ouvert $(V_z)_{z\in K}$. Comme H est **uniformément** continue sur le compact R, on peut quadriller R en rectangles $R_1, \ldots, R_N$ tels que le diamètre de chaque ensemble $H(R_k)$ est inférieur à ε. Alors ω est exacte au voisinage de chaque $H(R_k)$, par définition de ε. En notant γ_k un paramétrage admissible de ∂R_k, on a donc $\int_{H\circ\gamma_k} \omega = 0$ pour tout k. (Cette intégrale est bien définie car $H \circ \gamma_k$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux par hypothèse sur H). Enfin, on a $\int_{H\circ\gamma} \omega = \sum_{k=1}^{N} \int_{H\circ\gamma_k} \omega$, d'après une variante "évidente" du lemme de quadrillage 1.9, dont la preuve est un bon exercice de rédaction. Donc $\int_{H\circ\gamma} \omega = 0$. □

Preuve du théorème 4.2. Soient $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \Omega$ deux lacets (de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) homotopes dans Ω, et soit ω une 1-forme localement exacte sur Ω. Par le lemme 4.3, on peut trouver une homotopie séparément $\mathcal{C}^1$ par morceaux $H : [0, 1] \times [a, b] \to \Omega$ de γ_0 à γ_1. Soit $R = [0, 1] \times [a, b]$, et soit γ un paramétrage admissible de ∂R. Par le lemme 4.4, on a $\int_{H\circ\gamma} \omega = 0$. D'autre part, en notant $c_a : [0, 1] \to \Omega$ et $c_b : [0, 1] \to \Omega$ les chemins définis par $c_a(s) = H(s, a)$ et $c_b(s) = H(s, b)$, on a

$$\int_{H\circ\gamma} = \int_{c_a} + \int_{\gamma_1} - \int_{c_b} - \int_{\gamma_0} .$$

Enfin, on a $c_a = c_b$ puisque tous les chemins $t \mapsto H(s, t)$ sont des lacets. Ainsi, on obtient

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_0} \omega = 0 .$$

La deuxième partie du théorème est immédiate puisqu'on a évidemment $\int_c \omega = 0$ pour tout lacet constant c. □

COROLLAIRE 4.5. ("théorème de Cauchy homotopique")
Si f est une fonction holomorphe sur Ω, alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pour tout lacet homotope dans Ω à un lacet constant.

COROLLAIRE 4.6. *Le lacet γ défini sur $[0, 2\pi]$ par $\gamma(t) = e^{it}$ n'est pas homotope dans $\mathbb{C}^*$ à un lacet constant.*

Démonstration. On a $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$, d'où le résulat par le théorème de Cauchy homotopique.

□

Exercice. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ et soient γ_m et γ_n les lacets définis sur $[0, 2\pi]$ par $\gamma_m(t) = e^{imt}$ et $\gamma_n(t) = e^{int}$. A quelle condition γ_m et γ_n sont-ils homotopes dans $\mathbb{C}^*$?

4.2. Ouverts simplement connexes.

DÉFINITION 4.7. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que Ω est* ***simplement connexe*** *s'il est connexe et si tout lacet dans Ω est homotope dans Ω à un lacet constant.*

Remarque. Appelons **trou** d'un ouvert Ω toute composante connexe bornée de $\mathbb{C}\backslash\Omega$. Si un ouvert Ω possède un trou, on voit bien qu'un lacet entourant ce trou ne peut pas être déformé continûment sur un point en restant dans Ω, i.e. n'est pas homotope dans Ω à un lacet constant. Intuitivement, il est donc clair qu'un ouvert simplement connexe n'a pas pas de trous. Il est peut-être moins clair que les trous sont la seule obstruction à la simple connexité, i.e. que tout ouvert sans trous est simplement connexe. C'est effectivement vrai, mais la démonstration est loin d'être évidente.

Exemples.

(1) Tout ouvert **convexe** est simplement connexe.
(2) Tout ouvert Ω **étoilé** par rapport à un point p (i.e. $[p, z] \subset \Omega$ pour tout $z \in \Omega$) est simplement connexe.
(3) Si L est une demi-droite de $\mathbb{C}$, alors $\Omega = \mathbb{C} \backslash L$ est simplement connexe.
(4) $\Omega = \mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe.
(5) Si K est un compact *non vide* de $\mathbb{C}$, alors $\Omega = \mathbb{C} \backslash K$ n'est pas simplement connexe.

Démonstration. (2) Si $\gamma : [a, b] \to \Omega$ est un lacet dans Ω, on définit une homotopie (dans Ω) de γ au lacet constant égal à p en posant

$$H(s, t) = s\, p + (1 - s)\gamma(t)\,.$$

Comme tout ouvert convexe est étoilé (par rapport à n'importe lequel de ses points), (1) est un cas particulier de (2).

Pour (3), il suffit d'observer que si on note a l'origine de L, alors $\mathbb{C} \backslash L$ est étoilé par rapport à tout point $p \in L^* \backslash \{a\}$, où L^* est la demi-droite symétrique de L par rapport à a.

Pour (5), choisissons un point $a \in K$ et $R > 0$ tel que $K \subset D(a, R)$. Si on pose $\gamma(t) = a + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, alors γ est un lacet dans Ω et $\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2i\pi \neq 0$. Comme la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ est holomorphe sur Ω (puisque $a \notin \Omega$), cela montre que γ n'est pas homotope dans Ω à un lacet constant, d'après le théorème de Cauchy homotopique. Donc Ω n'est pas simplement connexe.

Enfin, (4) est un cas particulier de (5), qui a d'ailleurs déjà été rencontré.

□

Théorème 4.8. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert simplement connexe, alors toute 1-forme localement exacte sur Ω est exacte. En particulier, toute fonction holomorphe sur Ω possède des primitives holomorphes.*

Démonstration. Soit ω une 1-forme localement exacte sur Ω. D'après le théorème 4.2, on a $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout lacet γ dans Ω. Donc ω est exacte d'après le théorème 1.6.

□

Corollaire 4.9. *Si Ω est simplement connexe, alors toute fonction f holomorphe sur Ω et* ***sans zéros*** *possède un* ***logarithme holomorphe****. Autrement dit, si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et si $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$, alors il existe une fonction holomorphe g telle que $e^g = f$.*

Démonstration. Comme f ne s'annule pas, la fonction f'/f est bien définie et holomorphe sur Ω ; elle possède donc une primitive holomorphe g. On a alors

$$(e^{-g} f)' = e^{-g}(-g' f + f') = 0\,,$$

donc la fonction $C = e^{-g} f$ est constante puisque Ω est connexe. Si on fixe un point $z_0 \in \Omega$, on peut supposer, quitte à rajouter une constante à g, que $g(z_0)$ est un logarithme de $f(z_0)$: il suffit de remplacer g par $g + c$, où c vérifie $e^c = e^{-g(z_0)} f(z_0)$. Alors $C(z_0) = 1$, donc C est identiquement égale à 1, autrement dit $f = e^g$.

□

Corollaire 4.10. *Soit Ω un ouvert simplement connexe. Si u est une fonction* ***harmonique*** *sur Ω et à valeurs réelles, alors il existe une fonction $f \in H(\Omega)$ telle que* $\mathrm{Re}(f) = u$.

Remarque. Rappelons qu'une fonction u est dite harmonique si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $\Delta u = 0$, où $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot$ Comme on a également $\Delta = 4\,\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$, il est clair que toute fonction holomorphe f est harmonique ; et comme $\Delta(\mathrm{Re}(f)) = \mathrm{Re}(\Delta f)$ pour toute fonction f, on en déduit que si f est une fonction holomorphe, alors la fonction $\mathrm{Re}(f)$ est harmonique. Ceci ne dépend pas de l'ouvert Ω où les fonctions sont définies. La réciproque est fausse en général, mais devient vraie si Ω est simplement connexe : c'est le contenu de l'énoncé précédent.

Preuve du corollaire 4.10. Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Comme $\Delta = 4\,\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0\,,$$

et donc la fonction $g = \frac{\partial u}{\partial z}$ est holomorphe sur Ω. Comme Ω est simplement connexe, on peut donc trouver une fonction $f \in H(\Omega)$ telle que $f' = 2\frac{\partial u}{\partial z}\cdot$ Alors la fonction $h = \mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ vérifie $\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{2}\,f' = \frac{\partial u}{\partial z}$, et $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\,\overline{f'} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$, où la dernière égalité vient du fait que u est à valeurs réelles. Par conséquent, la fonction $\mathrm{Re}(f) - u$ est *constante* ; et quitte à rajouter une constante à f, on peut supposer que $\mathrm{Re}(f) - u \equiv 0$. □

5. Indice d'un lacet par rapport à un point

5.1. Définition et interprétation géométrique. Commençons par démontrer qu'on peut toujours trouver des déterminations continues du logarithme “le long d'un chemin” (ne passant pas par 0).

PROPOSITION 5.1. *Soit $p \in \mathbb{C}$, et soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin **ne passant pas par** p, i.e. $\gamma(t) \neq p$ pour tout $t \in [a, b]$. Soit $l_a \in \mathbb{C}$ un logarithme de $\gamma(a) - p$, et soit $l : [a, b] \to \mathbb{C}$ définie par*

$$l(t) = l_a + \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - p}\, ds.$$

*Alors l est une **détermination continue du logarithme le long de** $\gamma - p$. Autrement dit, l est continue et on a*

$$e^{l(t)} = \gamma(t) - p$$

pour tout $t \in [a, b]$.

Démonstration. Supposons d'abord γ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors l est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $l'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - p}\cdot$ Si on pose $\varphi(t) = e^{-l(t)}(\gamma(t) - p)$, alors

$$\varphi'(t) = (-l'(t)(\gamma(t) - p) + l(t)\gamma'(t)) = 0\,,$$

donc φ est constante ; et la constante vaut 1 car $\varphi(a) = e^{-l_a}(\gamma(a) - p) = 1$. D'où le résultat dans ce cas.

Si γ est seulement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on subdivise $[a, b]$ en intervalles $[a_0, a_1], \ldots, [a_{N-1}, a_N]$ sur lesquels γ est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $e^{l(t)} = \gamma(t) - p$ pour tout $t \in [a_0, a_1]$ d'après le premier cas. Pour $t \in [a_1, a_2]$, on a $l(t) = l(a_1) + \int_{a_1}^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - p}\, ds$ d'après la relation de Chasles. Comme $l(a_1)$ est un logarithme de $\gamma(a_1) - p$, on a donc $e^{l(t)} = \gamma(t) - p$ pour tout $t \in [a_1, a_2]$, d'après le premier cas appliqué sur l'intervalle $[a_1, a_2]$. De proche en proche, on obtient $e^{l(t)} = \gamma(t) - p$ pour tout $t \in [a, b]$. Enfin, la fonction l est continue en tant qu'intégrale indéfinie d'une fonction continue par morceaux. □

Remarque. En fait l est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et elle est de classe $\mathcal{C}^k$ si γ est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$.

Corollaire 5.2. (paramétrage “en coordonnées polaires”)
Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin tel que $\gamma(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$, et posons $r(t) = |\gamma(t)|$. Alors on peut écrire

$$\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)} ,$$

*où $\theta(t) \in \mathbb{R}$ et la fonction θ est continue. On dit que θ est une **détermination continue de l'argument le long de** γ. Si γ est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$, alors on peut prendre θ de classe $\mathcal{C}^k$.*

Démonstration. Avec les notations de la proposition (et $p = 0$), écrivons $l(t) = x(t) + i\theta(t)$, où x et θ sont des fonctions continues à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$ si γ est $\mathcal{C}^1$. Comme $e^{l(t)} = \gamma(t)$, on a $r(t) = |\gamma(t)| = e^{x(t)}$, et donc $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$. □

Corollaire 5.3. *Soit $p \in \mathbb{C}$. Si γ est un **lacet** ne passant pas par p, alors le nombre complexe $\int_\gamma \frac{dz}{z-p}$ est un multiple entier de $2i\pi$.*

Démonstration. Avec les notations de la proposition, ce nombre est égal à $\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-p}\, ds$, autrement dit à $l(b)-l(a)$. Comme $e^{l(b)} = \gamma(b)-p = \gamma(a)-p = e^{l(a)}$, on a $e^{l(b)-l(a)} = 1$, d'où le résultat. □

Définition 5.4. *Soit $p \in \mathbb{C}$, et soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un lacet ne passant pas par p. L'**indice de** γ **par rapport à** p est le nombre entier $I(\gamma, p)$ défini par*

$$I(\gamma, p) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-p} \cdot$$

Cette définition est purement analytique, et peut sembler un peu opaque. On va voir maintenant qu'on peut aussi définir l'indice de manière beaucoup plus géométrique.

Définition 5.5. *Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin ne passant pas par 0. La **variation de l'argument le long de** γ est la différence $\theta(b) - \theta(a)$, où θ est n'importe quelle détermination continue de l'argument le long de γ.*

Remarque. Le fait que $\theta(b) - \theta(a)$ ne dépende pas de la détermination θ vient de ce que que deux déterminations de l'argument le long de γ diffèrent d'une constante (multiple de 2π). En effet, si θ_1 et θ_2 sont deux telles déterminations, alors $\theta_1 - \theta_2$ est une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$, donc $\theta_1 - \theta_2$ est constante d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Le lemme suivant donne l'interprétation géométrique de l'indice.

Lemme 5.6. *Soit $p \in \mathbb{C}$, et soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un lacet ne passant pas par p. La variation de l'argument le long de $\gamma - p$ est égale à $2\pi\, I(\gamma, p)$. Ainsi, $I(\gamma, p)$ s'interprète géométriquement comme le **nombre de tours** effectué par le lacet γ autour du point p dans le sens trigonométrique.*

Démonstration. Soit θ une détermination continue de l'argument le long de $\gamma - p$. Alors $L(t) = \log|\gamma(t) - p| + i\theta(t)$ est une détermination continue du logarithme le long de $\gamma - p$. Comme deux telles détermination diffèrent d'une constante (multiple de $2i\pi$), on a donc $L(b) - L(a) = l(b) - l(a)$, où l est la détermination donnée par la proposition 5.1. Mais $l(b) - l(a) = 2i\pi\, I(\gamma, p)$ par définition de l'indice, et $L(b) - L(a) = i(\theta(b) - \theta(a))$ car $|\gamma(b) - p| = |\gamma(a) - p|$. On a donc bien $\theta(b) - \theta(a) = 2\pi\, I(\gamma, p)$. □

5.2. Formule de Cauchy "homotopique". L'importance de l'indice en analyse complexe vient du résultat suivant, qui est une autre version de la formule de Cauchy.

THÉORÈME 5.7. (formule de Cauchy homotopique)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit γ un lacet dans Ω, d'image Γ. On suppose que γ est homotope dans Ω à un lacet constant. Si f est une fonction holomorphe sur Ω, alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = I(\gamma,a)\,f(a)$$

pour tout point $a \in \Omega\backslash\Gamma$.

Démonstration. Fixons f et un point $a \in \Omega\backslash\Gamma$. Soit $g : \Omega \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{si } z \neq a \\ f'(a) & \text{si } z = a \end{cases}$$

La fonction g est continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega\backslash\{a\}$; elle est donc holomorphe *sur* Ω d'après le corollaire 2.3. Comme γ est homotope à un lacet constant, on a donc $\int_\gamma g(z)\,dz = 0$ d'après le théorème de Cauchy homotopique. Comme γ ne passe pas par a, cela s'écrit

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_\gamma \frac{f(a)}{z-a}\,dz = f(a) \times 2i\pi\, I(\gamma,a)\,.$$

□

5.3. Théorème des résidus "homotopique". Le théorème suivant est la version homotopique de la formule des résidus.

THÉORÈME 5.8. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur $\Omega\backslash S$, où S est un ensemble fini. Si γ est un lacet dans Ω ne passant par aucun point de S et homotope dans Ω à un lacet constant, alors*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a\in S} I(\gamma,a)\,\mathrm{Res}(f,a).$$

Démonstration. Pour $a \in S$, notons $c_n(a)$, $n \in \mathbb{Z}$ les coefficients du développement en série de Laurent de f au voisinage de a. On sait que la série $\sum_{n<0} c_n(a)(z-a)^n$ converge en tout point $z \in \mathbb{C}\backslash\{a\}$. Comme il s'agit d'une série entière en $w = (z-a)^{-1}$, on en déduit que la fonction g_a définie par

$$g_a(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(a)(z-a)^{-n}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{a\}$. Donc la fonction h définie par

$$h(z) := f(z) - \sum_{a\in S} g_a(z)$$

est holomorphe sur $\Omega\backslash S$. De plus, *par définition*, h possède une singularité éliminable en tout point $a \in S$; donc h est holomorphe sur Ω. Par le théorème de Cauchy homotopique, on a donc $\int_\gamma h(z)\,dz = 0$, autrement dit

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{a\in S}\int_\gamma g_a(z)\,dz. \tag{5.1}$$

Par ailleurs, comme la série définissant $g_a(z)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash\{a\}$ et que γ ne passe par a, on peut écrire pour tout $a \in S$:

$$\int_\gamma g_a(z)\,dz = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(a) \int_\gamma (z-a)^n dz.$$

De plus, si $n < -1$, alors $(z-a)^n$ possède une primitive holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{a\}$, à savoir $\frac{1}{n+1}(z-a)^{n+1}$. Comme γ est un lacet, on a donc $\int_\gamma (z-a)^n dz = 0$ pour tout $n < -1$. Par conséquent,

$$\int_\gamma g_a(z)\,dz = c_{-1}(a) \int_\gamma (z-a)^{-1} dz = \mathrm{Res}(f,a) \times 2i\pi I(\gamma, a).$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in S$, on voit que (5.1) est la formule annoncée. □

Remarque. Si l'ouvert Ω est **simplement connexe**, alors la formule de Cauchy homotopique, le Théorème de Cauchy homotopique et le Théorème des résidus homotopique sont valables pour **tout** lacet γ dans Ω.

5.4. Calcul pratique de l'indice. Pour pouvoir utiliser la formule de Cauchy homotopique, il faut être capable de calculer des indices. On va maintenant donner une méthode géométrique très facile à utiliser. Introduisons d'abord la terminologie suivante.

Définition 5.9. *Soit $\gamma : [a,b] \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ un chemin dans $\mathbb{C}$ et soit $L \subset \mathbb{C}$ une demi-droite d'origine p. On dit que γ **traverse** L en un point $c \in]a,b[$ si $\gamma(c) \in L$ et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma(t) \notin L$ pour $t \in [c-\varepsilon, c[\cup]c, c+\varepsilon]$ et l'une des deux propriétés suivantes ait lieu :*

- (+) *Quand t décrit l'intervalle $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, la demi-droite $[p, \gamma(t))$ "tourne dans le sens trigonométrique".*
- (−) *Quand t décrit l'intervalle $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, la demi-droite $[p, \gamma(t))$ "tourne dans le sens anti-trigonométrique".*

*On dit que γ traverse **positivement** L dans le cas (+), et **négativement** dans le cas (−).*

Exercice. Donner un sens précis à l'expression "tourner dans le sens trigonométrique".

Remarque. Il est compris dans la définition que γ ne traverse pas L aux points a et b.

Proposition 5.10. (calcul pratique de l'indice)
*Soit $p \in \mathbb{C}$ et soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet ne passant pas par p. On suppose qu'il existe une demi-droite L d'origine p tel que $\gamma^{-1}(L)$ est **fini** et que γ traverse L en tout point $c \in \gamma^{-1}(L)$. Notons n^+ le nombre de points c où γ traverse positivement L, et n^- le nombre de points c où γ traverse négativement L. Alors*

$$I(\gamma, p) = n^+ - n^-.$$

Démonstration. Par translation et rotation (i.e. quitte à composer γ par une similitude affine comme dans la preuve de la proposition 2.2), on se ramène au cas où $p = 0$ et $L = \mathbb{R}^-$.

Pour $u, v \in [a,b]$, $u < v$, notons $V(u,v)$ la *variation de l'argument de* $\gamma(t)$ *entre* u *et* v, i.e. la variation de l'argument le long de $\gamma_{|[u,v]}$. L'interprétation géométrique de l'indice nous dit que

$$V(a,b) = 2\pi\, I(\gamma, 0)\,.$$

D'autre part, en notant $\gamma^{-1}(L) = \{c_1, \ldots, c_N\}$ avec $a < c_1 < c_2 < \cdots < c_N < b$, on a

$$V(a,b) = V(a,c_1) + \sum_{i=1}^{N-1} V(c_i, c_{i+1}) + V(c_N, b)\,.$$

Pour $i \in \{1, \ldots, N\}$, posons $\varepsilon_i = +1$ si γ traverse $\mathbb{R}^-$ positivement au point c_i, et $\varepsilon_i = -1$ si γ traverse négativement. En notant arg la détermination principale de l'argument sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, la fonction $t \mapsto \arg(\gamma(t))$ est continue sur $[a,b]\backslash\gamma^{-1}(\mathbb{R}^-) = [a, c_1[\cup\,]c_1, c_2[\cup \cdots \cup\,]c_{N-1}, c_N[\cup\,]c_N b[$. De plus il découle directement des définitions qu'on a

$$\lim_{t\to c_i^-} \arg(\gamma(t)) = \varepsilon_i \pi \quad \text{et} \quad \lim_{t\to c_i^+} \arg(\gamma(t)) = -\varepsilon_i \pi$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ (faire un dessin !).

On en déduit que la fonction $t \mapsto \arg(\gamma(t))$ se prolonge par continuité à chaque intervalle $[a, c_1], [c_1, c_2] \ldots, [c_{N-1}], [c_N, b]$; et chaque prolongement est une détermination continue de l'argument le long de γ entre les bornes de l'intervalle considéré. On a donc $V(a, c_1) = \varepsilon_1\pi - \arg(\gamma(a))$, $V(c_i, c_{i+1}) = \varepsilon_{i+1}\pi - (-\varepsilon_i)\pi = (\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1})\pi$ pour tout $i < N$, et $V(c_N, b) = \arg(\gamma(b)) - (-\varepsilon_N\pi) = \arg(\gamma(b)) + \varepsilon_N\pi$. Par suite, et comme $\gamma(b) = \gamma(a)$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\pi I(\gamma, p) &= \varepsilon_1\pi - \arg(\gamma(a)) + \sum_{i=1}^{N-1} (\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1})\,\pi + \arg(\gamma(b)) + \varepsilon_N\pi \\ &= 2\pi \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \\ &= 2\pi\,(n^+ - n^-). \end{aligned}$$

□

Chapitre 5

Résidus

1. Le "théorème des résidus"

1.1. Énoncé et preuve du théorème.

DÉFINITION 1.1. *Soit $a \in \mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe dans un* voisinage épointé de a, *c'est-à-dire un ouvert de la forme $W \backslash \{a\}$, où W est un voisinage de a. Le **résidu** de f au point a est le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement de Laurent de f dans n'importe quel disque épointé $D(a,r) \backslash \{a\}$; on le note* $\operatorname{Res}(f,a)$. *Autrement dit, si $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ dans un disque épointé $D(a,r) \backslash \{a\}$, alors*

$$\operatorname{Res}(f,a) = c_{-1} .$$

Le lemme suivant a déjà été démontré.

LEMME 1.2. *Soit, $a \in \mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur $W \backslash \{a\}$, où W est un voisinage ouvert de a. Si $r > 0$ est tel que $\overline{D}(a,r) \subset W$, alors*

$$\int_{\partial D(a,r)} f(z)\, dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f,a) .$$

Démonstration. C'est la proposition 6.4 du Chapitre 3 avec $n = -1$. □

Mentionnons également deux faits évident mais très utiles :

Exercice 1. Montrer que si f et g sont holomorphe dans un voisinage épointé de a, alors $\operatorname{Res}(f+g,a) = \operatorname{Res}(f,a) + \operatorname{Res}(g,a)$.

Exercice 2. Montrer que si le point a est une singularité éliminable pour f, alors $\operatorname{Res}(f,a) = 0$.

Voici maintenant le résultat principal du chapitre.

THÉORÈME 1.3. (formule des résidus)
*Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \backslash S$, où S est un fermé de Ω sans points d'accumulation dans Ω. Soit également $K \subset \Omega$ un domaine élémentaire, et supposons que ∂K ne contienne aucun point de S. Alors S n'a qu'un nombre fini de points dans K, et on a la **formule des résidus***

$$\int_{\partial S} f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{a \in S \cap K} \operatorname{Res}(f,a) .$$

Démonstration. Comme S n'a pas de points d'accumulation dans Ω, on sait que S n'a qu'un nombre fini de points dans tout compact de Ω, donc en particulier dans K (voir la preuve du corollaire 3.8, Chapitre **??**).

Par hypothèse, les points de $K \cap S$ sont tous dans $\mathring{K}$. Comme ces points sont en nombre fini, on peut donc trouver $r > 0$ tel que $\overline{D}(a,r) \subset \mathring{K}$ pour tout $a \in S \cap K$. Posons alors $L = K \setminus \bigcup_{a \in S \cap K} D(a,r)$. Par définition, L est un domaine élémentaire contenu dans $\Omega \setminus S$, donc f est holomorphe au voisinage de L. D'après le théorème de Cauchy, on a donc $\int_{\partial L} f(z)\,dz = 0$. Autrement dit :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial K} f(z)\,dz - \sum_{a \in S \cap K} \int_{\partial D(a,r)} f(z)\,dz \\ &= \int_{\partial K} f(z)\,dz - 2i\pi \sum_{a \in S \cap K} \operatorname{Res}(f,a)\,, \end{aligned}$$

d'après le lemme 1.2. □

Remarque. Lorsque $S = \emptyset$, *i.e.* f est holomorphe sur Ω, la formule des résidus donne $\int_{\partial K} f(z)dz = 0$, autrement dit le théorème de Cauchy. De même, lorsque f est holomorphe sur Ω et qu'on applique la formule des résidus à $g(z) := \frac{f(z)}{z-a}$, où $a \in \mathring{K}$ (donc avec $S = \{a\}$), on obtient la formule de Cauchy. Ainsi, le théorème des résidus est formellement une généralisation du théorème de Cauchy et de la formule de Cauchy.

1.2. Calcul pratique d'un résidu dans le cas d'un pôle. Soit $a \in \mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de a. On va expliquer comment calculer $\operatorname{Res}(f,a)$ lorsque a est un **pôle** pour la fonction f. Rappelons que par définition, cela signifie qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ et deux fonctions u et v holomorphes au voisinage de a, avec $u(a) \neq 0$ et v possédant un zéro de multiplicité p en a, tels que

$$f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$$

au voisinage de a. Il revient au même de dire qu'on peut écrire

$$f(z) = \frac{u(z)}{(z-a)^p v_1(z)}$$

au voisinage de a, où u et v sont holomorphes avec $u(a) \neq 0$ et $v_1(a) \neq 0$; ou encore qu'on peut écrire

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p}$$

au voisinage de a, où g est holomorphe et $g(a) \neq 0$.

LEMME 1.4. *Supposons que a soit un* ***pôle simple*** *pour f, i.e. un pôle de multiplicité $p = 1$.*

- *Si f s'écrit sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)}$, avec g holomorphe au voisinage de a, alors*

$$\operatorname{Res}(f,a) = g(a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)\,. \tag{PS1}$$

- *Si f s'écrit sous la forme $f(z) = \frac{u(z)}{(z-a)v_1(z)}$ avec u, v holomorphes au voisinage de a et $v_1(a) \neq 0$, alors*

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{u(a)}{v_1(a)} \cdot \tag{PS2}$$

- *Si f s'écrit sous la forme $f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$ ave u, v holomorphe au voisinage de a et v ayant un zéro simple en a, alors*

$$\text{(PS2')} \qquad \mathrm{Res}(f, a) = \frac{u(a)}{v'(a)} \cdot$$

Démonstration. Pour (PS1), on développe g en série entière,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n .$$

On en déduit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^{n-1}$, autrement dit

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} d_{n+1} (z-a)^n .$$

Le résidu de f en a vaut donc $d_0 = g(a)$, ce qui prouve (PS1). La formule (PS2) s'en déduit immédiatement en posant $g = \frac{u}{v_1} \cdot$

Pour (PS2'), on écrit $v(z) = (z-a)v_1(z)$, où v_1 est holomorphe au voisinage de a avec $v_1(a) \neq 0$, et on applique (PS2) en remarquant que $v_1(a) = \lim_{z \to a} \frac{v(z)}{z-a} = v'(a)$. □

Les trois formules (PS1), (PS2) et et (PS2') sont très efficaces pour calculer un résidu en un pôle simple, et avec un peu d'habitude on voit immédiatement sur un exemple donné laquelle est la plus facile à utiliser. Il faut cependant impérativement garder à l'esprit que *ces formules ne sont valables que pour un pôle simple.* (En réalité, ce n'est pas tout à fait vrai : comme on n'a jamais utilisé le fait que $u(a) \neq 0$, les formules sont encore vraies si a est une singularité éliminable).

Exemple 1. Soit $f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \cdot$

La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash S$, où $S = \{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$. Si $a = (2k+1)\frac{\pi}{2} \in S$, alors $\cos z$ a un zéro simple en a car $\cos'(a) = -\sin a = (-1)^{k+1} \neq 0$. D'après (PS2), on a donc $\mathrm{Res}(f, a) = \frac{\sin a}{\cos'(a)} = \frac{\sin a}{-\sin a} = -1$, pour tout $a \in S$.

Exemple 2. Soit $f(z) = \frac{1}{1+z^6} \cdot$

La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash S$, où S est l'ensemble des racines 6-ièmes de -1, autrement dit $S = \{e^{i\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right)};\ 0 \leqslant k \leqslant 5\}$. Si $a = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right)} \in S$, alors a est un zéro simple de $v(z) = 1 + z^6$, avec $v'(a) = 6a^5 = -\frac{6}{a}$ puisque $a^6 = -1$. Donc $\mathrm{Res}(f, a) = -\frac{a}{6}$ pour tout $a \in S$.

LEMME 1.5. *Supposons que a soit un pôle de multiplicité $p \geqslant 1$ pour f, et écrivons $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p}$, où g est holomorphe au voisinage de a. Notons $c_n(g)$ les coefficients du développement en série entière de g au voisinage de a. Alors*

$$\text{(PM)} \qquad \mathrm{Res}(f, a) = c_{p-1}(g) = \frac{g^{(p-1)}(a)}{(p-1)!} \cdot$$

Démonstration. Comme $g(z) = \sum_0^\infty c_n(g)(z-a)^n$, le développement de Laurent de f en a s'écrit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(g)(z-a)^{n-p} = \sum_{n=-p}^{\infty} c_{n+p}(g)(z-a)^n\,,$$

d'où le résultat. □

Remarque. La deuxième identité dans (PM) est peu utilisable si p est grand puisqu'il faut dériver $p-1$ fois la fonction g, mais elle fonctionne assez bien pour $p=2$ ou 3. Si p est vraiment grand, il faut se débrouiller pour calculer le coefficient $c_{p-1}(g)$ sans dériver g, par exemple en déterminant directement le développement en série entière de g ; cf l'exemple donné à la fin de la Section 6 du Chapitre 3.

Exemple. Soit $f(z) = \frac{1}{z^3+3z^2-4}\cdot$

La fonction polynomiale $v(z) = z^3+3z^2-4$ admet 1 comme racine “évidente” ; et en factorisant par $z-1$, on trouve $v(z) = (z-1)(z+2)^2$. Donc $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{1,-2\}$, avec un pôle simple en 1 et un pôle double en -2. D'après (PS2), on a $\mathrm{Res}(f,1) = \frac{1}{v_1(1)}$ avec $v_1(z) = (z+2)^2$, i.e. $\mathrm{Res}(f,1) = \frac{1}{9}\cdot$ D'après (PM), on a $\mathrm{Res}(f,2) = \frac{g'(-2)}{1!}$ avec $g(z) = \frac{1}{z-1}$, i.e. $\mathrm{Res}(f,-2) = -\frac{1}{9}\cdot$

2. Exemples de calculs d'intégrales

Dans cette section, on donne trois exemples montrant que le théorème des résidus peut se révéler remarquablement efficace pour calculer certaines intégrales n'ayant a priori aucun lien avec l'analyse complexe.

La stratégie est toujours la même pour calculer une intégrale inconnue I. On applique le théorème des résidus à une fonction holomorphe f bien choisie (en général facile à trouver) sur le bord d'un domaine élémentaire K également bien choisi (et parfois difficile à trouver) *dépendant d'un ou plusieurs paramètres.* Le bord de K se décompose en un certain nombre de morceaux, et l'intégrale de f sur le bord de K est la somme des intégrales sur chacun des morceaux. En général, l'une de ces intégrales tend vers l'intégrale cherchée I quand les paramètres tendent vers certaines bornes. Si on a de la chance, on sait aussi déterminer les limites des autres intégrales (parfois en fonction de I), et on obtient alors la valeur de I en passant à la limite dans la formule des résidus.

2.1. Fonctions rationnelles sans pôles réels.

Proposition 2.1. *Soit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle sans pôles réels, avec $\deg(Q) \geqslant \deg(P)+2$. On note $\mathcal{P}^+$ l'ensemble des pôles de f à partie imaginaire strictement positive. Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2i\pi \sum_{a\in\mathcal{P}^+} \mathrm{Res}(f,a)\,.$$

Démonstration. L'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est bien définie car f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(t) = O(1/t^2)$ en $\pm\infty$, par hypothèse sur P et Q.

Posons $R_0 = \max\{|a|;\ a \text{ pôle de } f\}$, et pour $R > R_0$, considérons le domaine élémentaire

$$K_R = \{z\in\mathbb{C};\ |z|\leqslant R \text{ et } \mathrm{Im}(z)\geqslant 0\}\,.$$

La fonction f est visiblement holomorphe au voisinage de $K_R\backslash\mathcal{P}^+$. D'après le théorème des résidus, on a donc

$$\int_{\partial K_R} f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a\in\mathcal{P}^+} \mathrm{Res}(f,a)\,,$$

autrement dit

$$\int_{-R}^{R} f(t)\,dt + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a\in\mathcal{P}^+} \mathrm{Res}(f,a)\,,$$

où $\gamma_R : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma_R(t) = Re^{it}$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que l'intégrale $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz$ tend vers 0 quand $R\to\infty$.

En posant $M(R) = \sup\{|f(z)|;\ |z| = R\}$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| &\leqslant \int_{\gamma_R} |f(z)|\,|dz|\\ &\leqslant M(R)\times \pi R\,.\end{aligned}$$

Comme $M(R) = O(1/R^2)$ quand $R\to\infty$, on en déduit $\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| = O(1/R)$, d'où le résultat.

□

Exemple. Calcul de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6}$.

La fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^6}$ vérifie les hypothèses de la proposition, avec $\mathcal{P}^+ = \{e^{i\pi/6}, e^{i\pi/2}, e^{i5\pi/6}\} = \{e^{i\pi/6}, i, e^{i5\pi/6}\}$. De plus, on a vu que si a est un pôle de f, alors $\mathrm{Res}(f,a) = -\frac{a}{6}$. On a donc

$$\begin{aligned} I &= 2i\pi \times -\frac{1}{6}\left(e^{i\pi/6} + i + e^{i5\pi/6}\right)\\ &= -\frac{i\pi}{3}\left(i + 2i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{2\pi}{3}\,.\end{aligned}$$

2.2. Transformées de Fourier. Si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, sa **transformée de Fourier** est la fonction $\widehat{f} : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie par

$$\widehat{f}(\alpha) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\alpha t}\,dt\,.$$

Cette définition a un sens : la fonction intégrée est effectivement intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $|f(t)e^{-i\alpha t}| = |f(t)|$.

Proposition 2.2. *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. On suppose que f se prolonge en une fonction holomorphe (encore notée f) au voisinage de $\overline{U}\backslash S$, où U est le demi-plan $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ et S est une partie finie de U, telle que $|f(z)|\to 0$ quand $|z|\to\infty$, $z\in\overline{U}$. Sous ces hypothèses, on a pour tout $\alpha > 0$:*

$$\widehat{f}(-\alpha) = 2i\pi \sum_{a\in S} \mathrm{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, a)\,.$$

Démonstration. Fixons $\alpha > 0$. Pour $R > R_0 = \max\{|a|;\ a\in S\}$, on considère à nouveau le demi-disque

$$K_R = \{z\in\mathbb{C};\ |z|\leqslant R \text{ et } \mathrm{Im}(z)\geqslant 0\}\,.$$

La fonction $g(z) = f(z)e^{i\alpha z}$ est holomorphe au voisinage de $K_R \backslash S$, et tous les points de S sont dans $\mathring{K}_R$. D'après le théorème des résidus, on a donc

$$\int_{-R}^{R} f(t)e^{i\alpha t}\, dt + \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}\, dz = 2i\pi \sum_{a\in S} \mathrm{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, a)\,.$$

où $\gamma_R : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma_R(t) = Re^{it}$. L'intégrale $\int_{-R}^{R} f(t)e^{i\alpha t}\, dt$ tend vers $\widehat{f}(-\alpha)$, donc il suffit de montrer que $\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}\, dz \to 0$ quand $R \to \infty$.

On a

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}\, dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} f(Re^{it})\, e^{i\alpha Re^{it}}\, iRe^{it}\, dt\right| \\ &\leqslant \int_0^{\pi} |f(Re^{it})|\, |e^{i\alpha Re^{it}}|\, R\, dt \\ &= R\int_0^{\pi} |f(Re^{it})|\, e^{-R\alpha \sin t}\, dt \\ &\leqslant R\, M(R) \int_0^{\pi} e^{-R\alpha\sin t}\, dt\,, \end{aligned}$$

où on a posé $M(R) = \sup\{|f(z)|;\ |z| = R\}$.

De plus, l'intégrale $\int_0^{\pi} e^{-R\alpha\sin t}\, dt$ est égale à $2\int_0^{\pi/2} e^{-R\alpha\sin t}\, dt$, comme on le voit en écrivant $\int_0^{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ et en changeant t en $\pi - t$ dans l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$. Comme $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}\, t$ pour $t \in [0, \pi/2]$ par concavité du sinus, on en déduit

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{-R\alpha\sin t}\, dt &\leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\, \frac{2}{\pi} t}\, dt \\ &= 2\left[-\frac{\pi}{2\alpha R}\, e^{-\frac{2\alpha R}{\pi}\, t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha R}\right) \\ &\leqslant \frac{\pi}{\alpha R}\,. \end{aligned}$$

Au total, on obtient donc

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}\, dz\right| \leqslant \frac{\pi}{\alpha}\, M(R)\,,$$

d'où le résultat puisque $M(R)$ tend vers 0 quand $R \to \infty$, par hypothèse sur f. □

Exercice. Peut-on montrer que $\int_{\gamma_R} f(z)\, dz$ tend vers 0 par une application directe du théorème de convergence dominée ?

Exemple. Calcul de $I(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\, dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

La fonction à intégrer est effectivement intégrable sur $[0, \infty[$ car $\left|\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$; donc $I(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction I est visiblement paire, et on a $I(0) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

Pour $x = \alpha > 0$, on a

$$I(\alpha) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2}\, dt\right).$$

Autrement dit : $I(\alpha) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\widehat{f}(-\alpha)$, où $f(t) := \frac{1}{1+t^2}\cdot$

La fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{i,-i\}$, et $f(z)$ tend vers 0 quand $|z| \to \infty$. On peut donc appliquer la proposition précédente avec $S = \{i\}$. Le point i est un pôle simple pour $f(z)e^{i\alpha z}$, donc

$$\operatorname{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, i) = \frac{e^{i\alpha\times i}}{2i} = \frac{e^{-\alpha}}{2i}\cdot$$

On en déduit $\widehat{f}(-\alpha) = 2i\pi \times \frac{e^{-\alpha}}{2i} = \pi\, e^{-\alpha}$, d'où $I(x) = \frac{\pi}{2}\, e^{-\alpha}$ pour $\alpha > 0$. Comme I est paire, on obtient ainsi

$$I(x) = \frac{\pi}{2}\, e^{-|x|}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2.3. Un exemple plus compliqué. Dans cette sous-section, on va calculer pour tout $\alpha \in]0,1[$, l'intégrale

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha\,(1+t)}\cdot$$

Notons que I_α est bien définie et strictement positive, en tant qu'intégrale d'une fonction mesurable strictement positive (!). Mais évidemment, I_α est une "vraie" intégrale (i.e. $I_\alpha < \infty$) car la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue sur $]0,\infty[$ et équivalente à $\frac{1}{t^\alpha}$ en 0 et à $\frac{1}{t^{\alpha+1}}$ en $+\infty$, donc intégrable sur $]0,\infty[$ puisque $\alpha \in]0,1[$.

Suivant la stratégie exposée plus haut, on a envie d'appliquer le théorème des résidus à $f(z) = \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$ sur des domaines élémentaires bien choisis. Cela étant, deux problèmes se posent immédiatement :

- donner un sens à z^α ;
- trouver des domaines élémentaires bien adaptés au problème.

Donner un sens à z^α n'est pas difficile : on choisit une demi-droite Δ d'origine 0 et on prend la détermination principale de z^α dans $\mathbb{C}\backslash\Delta$. Maintenant, on a le choix de la demi-droite Δ, et c'est la recherche du "bon" choix qui va en fait donner l'idée des domaines élémentaires à considérer.

Si on regarde la définition de I_α, on voit que la demi-droite $\Delta = [0,\infty[$ doit jouer un rôle. Paradoxalement, c'est cette demi-droite qu'on va enlever pour définir z^α alors qu'on veut calculer une intégrale *sur* Δ. On définit donc officiellement la fonction f sur $\Omega = \mathbb{C}\backslash([0,\infty[\cup\{-1\})$ par

$$f(z) = \frac{1}{z^\alpha(1+z)}\,,$$

où z^α est défini en prenant l'argument dans $]0,2\pi[$, puisque la demi-droite $[0,\infty[$ correspond à l'argument $\theta = 0$ (modulo 2π).

Ce choix n'est pas si surprenant si on garde à l'esprit la recherche des domaines élémentaires, qui doivent dépendre de certains paramètres appelés à tendre vers certaines limites : pour retrouver $\Delta = [0,\infty[$ (et donc I_α) dans le processus de passage à la limite, il suffira de prendre des domaines élémentaires dont certains morceaux "tendent" vers $[0,\infty[$. D'autre part, ces domaines doivent contenir le point $a = -1$ (le seul pôle de $f(z)$) dans leur intérieur si on veut que le théorème des résidus donne une information intéressante, et ils doivent être disjoints de $[0,\infty[$ puisque f n'est pas définie sur $[0,\infty[$.

Ces remarques devraient rendre moins “parachutée” la définition qui suit : pour ε et R vérifiant $0 < \varepsilon < 1 < R$, on notera $K_{\varepsilon R}$ le domaine élémentaire de type “pac-man” délimité par le demi-cercle $C_\varepsilon = \{|z| = \varepsilon,\ \mathrm{Re}(z) \leqslant 0\}$, les deux segments $I^+_{\varepsilon R} = [i\varepsilon, i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}]$, $I^-_{\varepsilon R} = [-i\varepsilon, -i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}]$, et l'arc de cercle $\Gamma_{\varepsilon R} = \{Re^{i\theta};\ \theta \in [-\pi;\pi],\ |\theta| \geqslant \theta_{\varepsilon R}\}$, où $\theta_{\varepsilon R} = \arctan(\varepsilon/\sqrt{R^2-\varepsilon^2})$. Bien entendu, *un dessin est indispensable ici* !

La fonction f est holomorphe dans Ω et possède un pôle simple en -1, avec

$$\mathrm{Res}\,(f,-1) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}\,.$$

Comme $-1 \in \mathring{K}_{\varepsilon R}$, la formule des résidus s'écrit donc

$$\int_{\partial K_{\varepsilon R}} f(z)\,dz = 2i\pi\, e^{-i\pi\alpha}\,. \tag{2.1}$$

Quand ε tend vers 0, l'intégrale $\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz$ tend vers 0 car

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\varepsilon e^{it})^\alpha(1+\varepsilon e^{it})}\, i\varepsilon e^{it}\,dt\right| \\
&\leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon\,dt}{\varepsilon^\alpha\,|1+\varepsilon e^{it}|} \\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon^\alpha(1-\varepsilon)} \times \pi\varepsilon \\
&= \frac{\pi\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\varepsilon}
\end{aligned}$$

et $\alpha < 1$.

L'intégrale $\int_{\Gamma_{\varepsilon R}} f(z)\,dz = \int_{\theta_{\varepsilon R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon R}} iR^{1-\alpha}\,\frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta$ tend vers $\int_0^{2\pi} iR^{1-\alpha}\,\frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta$ quand $\varepsilon \to 0$ (d'après le théorème de convergence dominée) car $\theta_{\varepsilon,R}$ tend vers 0 et la fonction apparaissant sous l'intégrale est intégrable sur $[0,2\pi]$.

Si $t \in]0,\infty[$, alors $(t+i\varepsilon)^\alpha$ tend vers t^α et $(t-i\varepsilon)^\alpha$ tend vers $e^{2i\pi\alpha}t^\alpha$ quand ε tend vers 0^+, car l'argument de $t+i\varepsilon$ tend vers 0 et celui de $t-i\varepsilon$ tend vers 2π. Comme de plus $|f(t+iy)| \leqslant \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est intégrable sur $]0,R]$ (car $\alpha < 1$), on en déduit, à l'aide du théorème de convergence dominée, que les intégrales $\int_{I^+_{\varepsilon R}} f(z)\,dz$ et $\int_{I^-_{\varepsilon R}} f(z)\,dz$ tendent respectivement vers $\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$ et $e^{-2i\pi\alpha}\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$ quand ε tend vers 0.

En faisant tendre ε vers 0 dans (2.1), on obtient donc

$$\left(1-e^{-2i\pi\alpha}\right)\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} + i\int_0^{2\pi} \frac{R^{1-\alpha}e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta = 2i\pi\, e^{-i\pi\alpha} \tag{2.2}$$

pour tout $R > 1$. Enfin, on a

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{R^{1-\alpha}e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta\right| \leqslant \frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \times 2\pi\,,$$

et comme $\alpha > 0$, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{R^{1-\alpha}e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$. En faisant tendre R vers l'infini dans (2.2), on obtient ainsi

$$(1-e^{-2i\pi\alpha})I_\alpha = 2i\pi\, e^{-i\pi\alpha}\,,$$

d'où finalement, en écrivant $1 - e^{-2i\pi\alpha} = e^{-i\pi\alpha}(e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}) = e^{-i\pi\alpha} \times 2i\sin(\pi\alpha)$:

$$I_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \cdot$$

3. Dénombrements de zéros et de pôles

3.1. Zéros, pôles et dérivée logarithmique. Dans ce qui suit, on dira qu'une fonction méromorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est **non triviale** si elle n'est identiquement nulle sur aucune composante connexe de Ω.

DÉFINITION 3.1. *Soit f une fonction méromorphe non triviale sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pour tout ensemble $K \subset \Omega$, on note*
- *$N_Z(f, K)$ le nombre de zéros de f dans K, comptés avec leurs multiplicités ;*
- *$N_P(f, K)$ le nombre de pôles de f dans K, comptés avec leurs multiplicités.*

Remarque 1. Si K est **compact**, alors f n'a qu'un nombre **fini** de zéros et de pôles sur K, car l'ensemble des zéros et l'ensemble des pôles de f n'ont pas de point d'accumulation dans Ω.

Remarque 2. Le sens de l'expression "comptés avec leurs multiplicités" est le suivant : si $a \in K$ est un zéro ou un pôle de multiplicité m, alors a doit être compté m fois dans le calcul de $N_Z(f, K)$ ou $N_P(f, K)$.

Exercice. Soit $f(z) = (z-1)^2(z-3)^3 \cos(z)$. Calculer $N_Z(f, \overline{D}(0, 2))$ et $N_Z(f, \overline{D}(0, 5))$.

DÉFINITION 3.2. *Soit f une fonction méromorphe non triviale sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. La **dérivée logarithmique** de f est la fonction (méromorphe) f'/f.*

Remarque. La non-trivialité de f entraine que f'/f est effectivement une fonction méromorphe sur Ω. Elle est définie sur $\Omega\backslash(P(f) \cup Z(f))$, où $P(f)$ est l'ensemble des pôles de f.

L'expression "dérivée logarithmique" vient de la remarque suivante.

Exercice 1. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur Ω possèdant un logarithme holomorphe $\log f$, alors $f'/f = (\log f)'$.

Par ailleurs, la dérivation logarithmique change les produits en somme (ce qui n'est bien entendu pas surprenant) :

Exercice 2. Montrer que si f et g sont deux fonctions méromorphes non triviales définies sur un même ouvert Ω, alors $(fg)'/fg = f'/f + g'/g$ et $(f/g)'/(f/g) = f'/f - g'/g$.

Le lien entre dérivée logarithmique et nombre de zéros et/ou de pôles est donnée par la proposition suivante.

PROPOSITION 3.3. *Soit f une fonction méromorphe non triviale sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit $K \subset \Omega$ un domaine élémentaire. On suppose que ∂K ne contient aucun zéro et aucun pôle de f. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N_Z(f, K) - N_P(f, K)\,.$$

La preuve repose sur le théorème des résidus et sur le lemme suivant.

LEMME 3.4. *Soit f une fonction méromorphe au voisinage d'un point $a \in \mathbb{C}$.*

(1) *Si a est un zéro de f avec multiplicité m, alors* $\operatorname{Res}(f'/f, a) = m$.

(2) *Si a est un pôle de f avec multiplicité m, alors* $\operatorname{Res}(f'/f, a) = -m$.

Démonstration. Posons $n = m$ dans le cas (1), et $n = -m$ dans le cas (2). Alors on peut écrire

$$f(z) = (z-a)^n g(z)\,,$$

où g est holomorphe au voisinage de a et $g(a) \neq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{\big((z-a)^n\big)'}{(z-a)^n} + \frac{g'(z)}{g(z)} \\ &= \frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}\cdot \end{aligned}$$

Comme g'/g est holomorphe au voisinage de a, on a $\operatorname{Res}(g'/g, a) = 0$, d'où

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{n}{z-a}, a\right) + 0 = n\,.$$

□

Preuve de la proposition 3.3. Notons $a_1, \dots, a_M$ les zéros de f dans K, et $a_1^*, \dots, a_N^*$ les pôles. Les multiplicités correspondants sont notées m_i et m_j^*.

La fonction f'/f est holomorphe au voisinage de $K \backslash \{a_1, \dots, a_M, a_1^*, \dots, a_N^*\}$. D'après le théorème des résidus et le lemme 3.4, on a donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz &= 2i\pi \left(\sum_{i=1}^M \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a_i\right) + \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a_j^*\right)\right) \\ &= 2i\pi \left(\sum_{i=1}^M m_i - \sum_{j=1}^N m_j^*\right) \\ &= 2i\pi \left(N_Z(f,K) - N_P(f,K)\right). \end{aligned}$$

□

3.2. Le théorème de Rouché. Le résultat suivant signifie que si on veut calculer le nombre de zéros d'une fonction holomorphe f dans un certain domaine élémentaire K, on peut remplacer f par n'importe quelle fonction holomorphe g suffisamment proche de f. Évidemment, ceci n'est intéressant que si $N_Z(g,K)$ est facile à calculer. On aura donc intérêt à chercher une fonction g la plus "simple" possible.

THÉORÈME 3.5. ("théorème de Rouché")
Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit $K \subset \Omega$ un domaine élémentaire. Soit également $g \neq 0$ une autre fonction holomorphe sur Ω. On suppose qu'on a $|f(\xi) - g(\xi)| < |g(\xi)|$ pour tout $\xi \in \partial K$. Alors g a le même nombre de zéros que f dans K. De plus, tous ces zéros sont dans $\mathring{K}$.

Exemple. Cherchons le nombre de zéros de $f(z) = z^7 + 3z^4 - 2z^3 + 1$ dans le disque $K = \overline{D}(0,2)$. Si on pose $g(z) = z^7$ et si $\xi \in \partial K$, i.e. $|\xi| = 3$, alors $|f(\xi) - g(\xi)| = |3\xi^4 - 2\xi^3 + 1| \leqslant 3 \times 2^4 + 2 \times 2^3 + 1 = 65$ et $|g(\xi)| = 2^7 = 128$. D'après Rouché, on a donc $N_Z(f,K) = N_Z(g,K) = 7$ (car g possède un zéro de multiplicité 7 en $z = 0$).

Remarque 1. Il est essentiel que l'inégalité $|f(\xi) - g(\xi)| < |g(\xi)|$ soit **stricte** pour que la conclusion soit valable. Par exemple, si on prend $f(z) = z + 1$, $g(z) = 1$ et $K = \overline{\mathbb{D}}$, alors f a un zéro dans K (à savoir $z = -1$) mais g n'en a aucun. Pourtant, on a $|f(\xi) - g(\xi)| = |\xi| \leqslant 1 = |g(\xi)|$ pour tout $\xi \in \partial\mathbb{D}$.

Remarque 2. Bien entendu, f et g n'ont pas nécessairement les *mêmes* zéros, et les multiplicités n'ont pas de raisons d'être conservées. Par exemple, si $f(z) = z^3 - 1$ et $g(z) = z^3$, alors Rouché s'applique dans le disque $K = \overline{D}(0, 2)$ et on en "déduit" que f et g ont 3 zéros dans K ; mais f a 3 zéros simples (les racines cubiques de 1) et g un zéro triple en 0.

La preuve du théorème de Rouché utilise les deux lemmes suivants.

LEMME 3.6. *Soit f une fonction méromorphe non triviale sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit γ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans Ω dont l'image ne contient aucun zéro et aucun pôle de f. Alors*

$$\int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\, d\xi = \int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z}\cdot$$

Démonstration. Il suffit d'écrire les définitions. □

LEMME 3.7. *Si α et β sont deux lacets dans $\mathbb{C}^*$, définis sur le même intervalle $[a, b]$, tels que $|\alpha(t) - \beta(t)| < |\beta(t)|$ pour tout $t \in [a, b]$, alors $\int_\alpha \frac{dz}{z} = \int_\beta \frac{dz}{z}\cdot$*

Démonstration. Il suffit de montrer que α et β sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$. Par hypothèse, on a $|\alpha(t) - \beta(t)| < |\alpha(t)| + |\beta(t)|$ pour tout $t \in [a, b]$. Géométriquement, cela signifie que le segment $[\alpha(t), \beta(t)]$ ne passe jamais par 0. Par suite, si on définit $H : [0, 1] \times [a, b] \to \mathbb{C}$ par $H(s, t) = (1 - s)\,\alpha(t) + s\,\beta(t)$, alors H *est à valeurs dans* $\mathbb{C}^*$, et est donc une homotopie dans $\mathbb{C}^*$ entre les lacets α et β. □

Autre preuve. La démonstration qui suit est plus élémentaire, car elle n'utilise pas l'invariance de l'intégrale curviligne par homotopie. Si on pose $\gamma(t) = \alpha(t)/\beta(t)$, alors $|\gamma(t) - 1| < 1$ pour tout $t \in [a, b]$, autrement dit $\gamma(t) \in D(1, 1)$. D'autre part, on sait que la détermination principale du logarithme est holomorphe sur $D(1, 1)$ (car $D(1, 1) \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$) et qu'on a $\log'(z) = \frac{1}{z}\cdot$ D'après le théorème fondamental de l'analyse, on en déduit $\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_\gamma d(\log) = 0$. Mais $\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_a^b \frac{(\alpha/\beta)'(t)}{(\alpha/\beta)(t)}\, dt$, et il est facile de vérifier qu'on a $\frac{(\alpha/\beta)'}{\alpha/\beta} = \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\beta'}{\beta}\cdot$ On obtient ainsi $0 = \int_a^b \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} - \int_a^b \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\, dt = \int_\alpha \frac{dz}{z} - \int_\beta \frac{dz}{z}$, d'où le résultat. □

Preuve du théorème de Rouché. Remarquons d'abord que f et g n'ont aucun zéro sur ∂K : si on avait $f(\xi) = 0$ pour un certain $\xi \in \partial K$, on obtiendrait $|0 - g(\xi)| < |g(\xi)|$; et si on avait $g(\xi) = 0$, on obtiendrait $|f(\xi) - 0| < 0$.

Soit $(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ un paramétrage admissible de ∂K. D'après la proposition 3.3 et le lemme 3.6, on a

$$\begin{aligned} N_Z(f, K) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^N \int_{f\circ\gamma_j} \frac{dz}{z}\,, \end{aligned}$$

et de même :

$$N_Z(g,K) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^{N}\int_{g\circ\gamma_j}\frac{dz}{z}\,.$$

D'autre part, en notant $[a_j, b_j]$ l'intervalle de définition de γ_j, on a par hypothèse $|f\circ\gamma_j(t) - g\circ\gamma_j(t)| < |g\circ\gamma_j(t)|$ pour tout j et pour tout $t \in [a_j, b_j]$. D'après le lemme 3.7, on en déduit $\int_{g\circ\gamma_j}\frac{dz}{z} = \int_{f\circ\gamma_j}\frac{dz}{z}$ pour tout $j \in \{1,\dots,N\}$, et par conséquent $N_Z(f,K) = N_Z(g,K)$.

□

Corollaire 3.8. *Soit f une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe $\Omega\subset\mathbb{C}$, et soit $K\subset\Omega$ un domaine élémentaire. Pour tout $w\in\mathbb{C}$, notons $N(f,w,K)$ le nombre de solutions de l'équation $f(z) = w$ dans K, comptées avec leurs multiplicités :*

$$N(f,w,K) = N_Z(f-w,K)\,.$$

*Alors l'application $w\mapsto N(f,w,K)$ est **localement constante** sur l'ouvert $\mathbb{C}\backslash f(\partial K)$: pour tout point $w_0\in\mathbb{C}\backslash f(\partial K)$, on a $N(f,w,K)\equiv N(f,w_0,K)$ au voisinage de w_0.*

Démonstration. Fixonx $w_0\in\mathbb{C}\backslash f(\partial K)$. Comme ∂K est compact, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $|f(\xi) - w_0| \geqslant \varepsilon$ pour tout $\xi\in\partial K$. Si $w\in\mathbb{C}$ vérifie $|w - w_0| < \varepsilon$, alors $w\notin f(\partial K)$ par définition de ε, et on a

$$|(f(\xi) - w) - (f(\xi) - w_0)| = |w - w_0| < |f(\xi) - w_0|$$

pour tout $\xi\in\partial K$. D'après le théorème de Rouché, on a donc

$$N(f,w,K) = N_Z(f-w,K) = N_Z(f-w_0,K) = N(f,w_0,K)$$

pour tout $w\in D(w_0,\varepsilon)$. □

3.3. Trois exemples d'application.

Exemple 1. Le théorème fondamental de l'algèbre.

Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N$ un polynôme de degré $N\geqslant 1$ (à coefficients complexes). On va montrer à l'aide du théorème de Rouché que P possède N racines complexes (comptées avec leur multiplicité).

En écrivant $P(z) = a_N z^N\left(1 + \frac{a_{N-1}}{a_N}\times\frac{1}{z} + \cdots + \frac{a_0}{a_N}\times\frac{1}{z^{N-1}}\right)$, on voit que $P(z)\sim a_N z^N$ quand $|z|\to\infty$. On peut donc trouver $R > 0$ tel que

$$|z|\geqslant R \implies |P(z) - a_N z^N| \leqslant \frac{1}{2}|a_N z^N|\,.$$

Posons alors $K = \overline{D}(0,R)$. Si $\xi\in\partial K$, on a

$$|P(\xi) - a_N\xi^N| \leqslant \frac{1}{2}|a_N\xi^N| < |a_N\xi^N|$$

car évidemment $a_N\xi^N\neq 0$. D'après Rouché appliqué avec $f = P$ et $g(z) = a_N z^N$, on en déduit

$$N(P(z),0,K) = N(a_N z^N,0,K) = N$$

car $z = 0$ appartient à K et est racine de z^N avec multiplicité N. Ainsi, P a au moins N racines complexes, et bien entendu au plus N puisque $\deg P = N$.

Exemple 2. Le “théorème de l'application ouverte”.

Le théorème suivant a déjà été démontré à l'aide du principe du maximum. On va en donner une autre preuve basée sur le corollaire 3.8.

THÉORÈME 3.9. *Si f est une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors f est une application **ouverte** : l'image par f de tout ouvert $V \subset \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Fixons un ouvert $V \subset \Omega$ et un point $a \in V$, et posons $b = f(a)$. On cherche $\varepsilon > 0$ tel que $D(b, \varepsilon) \subset f(V)$.

Comme f n'est pas constante et que Ω connexe, le principe des zéros isolés (appliqué à $g(z) = f(z) - b$) permet de choisir $r > 0$ tel que $\overline{D}(a, r) \subset V$ et $f(z) \neq b$ pour tout $z \in \overline{D}(a, r) \backslash \{a\}$. En posant $K = \overline{D}(a, r)$, on a donc $b \notin f(\partial K)$.

D'après le corollaire 3.8, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $N(f, w, K) = N(f, b, K)$ pour tout $w \in D(b, \varepsilon)$. Comme $b = f(a)$ et $a \in K$, on a $N(f, a, K) \geqslant 1$, et donc $N(f, w, K) \geqslant 1$ pour $w \in D(b, \varepsilon)$. Ainsi, pour tout $w \in D(b, \varepsilon)$, l'équation $f(z) = w$ possède au moins une solution dans K, et donc dans V. Autrement dit, $D(b, \varepsilon) \subset f(V)$. □

Exercice. Déduire le principe du maximum du théorème de l'application ouverte.

EXEMPLE 3. Fonctions holomorphes injectives.

Comme autre illustration du corollaire 3.8, on va maintenant démontrer le résultat suivant.

PROPOSITION 3.10. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si f est une fonction holomorphe **injective** sur Ω, alors f' ne s'annule pas sur Ω.*

Démonstration. En considérant séparément chaque composante connexe de Ω, on se ramène au cas où Ω est connexe.

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe injective, et supposons qu'on ait $f'(a) = 0$ pour un certain $a \in \Omega$. Comme f n'est pas constante (et donc $f' \neq 0$), le principe des zéros isolés permet de trouver $r > 0$ avec $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$ tel que les deux propriétés suivantes soient vérifiées : $f(z) \neq f(a)$ pour tout $z \in \overline{D}(a, r) \backslash \{a\}$, et f' ne s'annule pas sur $\overline{D}(a, r) \backslash \{a\}$.

Posons $K = \overline{D}(a, r)$ et $b = f(a)$, de sorte que $b \notin f(\partial K)$. Si on pose $g(z) = f(z) - b$, alors $g(a) = 0$ et $g'(a) = f'(a) = 0$. Donc le point a est un zéro de $g = f - b$ avec une multiplicité au moins égale à 2, et comme $a \in K$ on en déduit $N(f, b, K) \geqslant 2$. D'après le corollaire 3.8, on a $N(f, w, K) \geqslant 2$ pour tout w suffisamment proche de b ; en particulier, on peut trouver $w_0 \neq b$ tel que $N(f, w_0, K) \geqslant 2$.

Deux cas sont alors possibles : ou bien on peut trouver 2 points distincts $z_1, z_2 \in K$ tels que $f(z_1) = w_0 = f(z_2)$; ou bien on peut trouver un point $z_0 \in K$ tel que $f(z_0) = w_0$ et $f'(z_0) = 0$. Le premier cas est exclu par injectivité de f ; et le deuxième est également exclu car la seule racine de f' dans K est la point a et $f(a) = b \neq w_0$. On a ainsi obtenu une contradiction. □

COROLLAIRE 3.11. *Si $f : \Omega \to \Omega'$ est une bijection holomorphe d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ sur un ouvert Ω', alors f^{-1} est holomorphe sur Ω'.*

Démonstration. La fonction f n'est constante sur aucune composante connexe de Ω, donc $f(V)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ (et donc de Ω') pour tout ouvert $V \subset \Omega$, d'après le théorème de l'application ouverte. Autrement dit : $(f^{-1})^{-1}(V)$ est ouvert pour tout ouvert $V \subset \Omega$, ce qui signifie que f^{-1} est *continue* sur Ω.

La continuité de f étant acquise, on peut maintenant montrer, exactement comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, que f^{-1} est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point, avec

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$$

pour tout $z \in \Omega'$. (Les détails sont laissés en exercice). Comme $f' \circ f^{-1}$ est continue, $(f^{-1})'$ est continue, donc f^{-1} est holomorphe. (On peut aussi appliquer Cauchy-Goursat, mais ce n'est pas indispensable). $\square$

Remarque. On aurait pu procéder très différemment, en utilisant le **théorème d'inversion locale**. En effet, comme f est holomorphe le déterminant jacobien de f en tout point $z \in \Omega$ est égal à $|f'(z)|^2$ (voir le chapitre 1, corollaire 2.11) ; donc J_f ne s'annule jamais, et d'après le théorème d'inversion locale on en déduit que f est un difféomorphisme de Ω sur Ω', autrement dit que $g = f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. En différentiant la relation $f \circ g(z) = z$, on obtient alors $(f' \circ g)\, dg = dz$, autrement dit $dg = \frac{dz}{f'(g(z))} \cdot$ Cela montre que $g = f^{-1}$ est holomorphe, avec la formule attendue pour $(f^{-1})'$.

Corollaire 3.12. *Si f est une fonction holomorphe injective sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors $\Omega' = f(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et f est un difféomorphisme de Ω sur Ω'.*

Démonstration. Le fait que Ω' soit ouvert vient par exemple du théorème de l'application ouverte, donc on peut appliquer le corollaire précédent. On peut aussi appliquer la proposition et le théorème d'inversion locale. $\square$

Exercice. Soit f une fonction holomorphe injective sur le disque unité $\mathbb{D}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \, .$$

En utilisant le théorème de changement de variable, un passage en coordonnées polaires et l'identité de Parseval, montrer que l'aire de $f(\mathbb{D})$ est donnée par la formule

$$aire(f(\mathbb{D})) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} n\, |c_n|^2 \, .$$

Chapitre 6

Suites, intégrales et produits infinis

1. Suites et intégrales

1.1. Majoration de la dérivée. Tous les résultats théoriques de ce chapitre vont découler du lemme très simple suivant. Pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$, on posera

$$K^\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{C};\ \mathrm{dist}(\xi, K) \leqslant \varepsilon\}.$$

LEMME 1.1. *Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ vérifiant la propriété suivante : pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$ et pour toute fonction f holomorphe au voisinage de K^ε, on a*

$$\sup_{z \in K} |f'(z)| \leqslant C(\varepsilon) \sup_{\xi \in K^\varepsilon} |f(\xi)|.$$

Démonstration. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω contenant K^ε. Pour tout $z \in K$, le disque $\overline{D}(z, \varepsilon)$ est contenu dans K^ε, donc dans Ω. D'après la formule de Cauchy "dérivée une fois", on a donc

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2}\, |d\xi| \\ &\leqslant \sup\Big\{|f(\xi)|;\ \xi \in \partial D(z,\varepsilon)\Big\} \times \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{|d\xi|}{\varepsilon^2} \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\xi \in K^\varepsilon} |f(\xi)|. \end{aligned}$$

Comme $z \in K$ est arbitraire, cela démontre le lemme avec $C(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$. □

Remarque. Le point essentiel est que la constante $C(\varepsilon)$ **ne dépend pas de la fonction** f holomorphe au voisinage de K^ε.

1.2. Suites de fonctions holomorphes. On sait bien que si une suite (f_n) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$ converge uniformément, alors sa limite f n'a aucune raison d'être encore de classe $\mathcal{C}^1$: pour pouvoir conclure à coup sur que f est de classe $\mathcal{C}^1$, on doit par exemple supposer que la suite des *dérivées* (f_n') converge uniformément. La situation est très différente lorsqu'on considère des fonctions holomorphes : il n'est plus nécessaire de faire une hypothèse sur les dérivées, car la propriété que l'on souhaite est *automatiquement* satisfaite. C'est le contenu du théorème suivant.

THÉORÈME 1.2. *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose que la suite (f_n) converge **uniformément sur tout compact** vers une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe et $f_n' \to f'$ uniformément sur tout compact.*

Démonstration. Soit K un compact quelconque de Ω, et choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $K^\varepsilon \subset \Omega$. D'après le lemme 1.1, on a

$$\sup_K |f'_q - f'_p| \leqslant C(\varepsilon) \sup_{K^\varepsilon} |f_q - f_p|$$

pour tous $p, q \in \mathbb{N}$. Comme la suite (f_n) converge uniformément sur le compact K^ε, on en déduit que la suite des dérivées (f'_n) vérifie le **critère de Cauchy uniforme** sur tout compact $K \subset \Omega$. Par conséquent, la suite (f'_n) converge uniformément sur tout compact vers une fonction $g : \Omega \to \mathbb{C}$, nécessairement continue car les f'_n le sont.

Comme $df_n = f'_n\, dz$, cela signifie que la suite des différentielles (df_n) converge uniformément sur tout compact vers $g\, dz$. D'après le théorème "standard" sur les suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, avec $df = g\, dz$. Autrement dit, f est holomorphe et $f' = g$. □

Remarque. Pour montrer que la fonction f est holomorphe, on peut également utiliser le **théorème de Morera** (théorème 2.1 du chapitre 4). Tout d'abord, la convergence uniforme sur tout compact entraine la continuité de f, car les f_n sont continues. Ensuite, si R est un rectangle contenu dans Ω, alors $\int_{\partial R} f_n(z)\, dz$ tend vers $\int_{\partial R} f(z)\, dz$ quand $n \to \infty$, par convergence uniforme de (f_n) sur le compact ∂R ; et donc $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$ puisque $\int_{\partial R} f_n(z)\, dz = 0$ pour tout n (d'après le théorème de Cauchy). En revanche, la convergence des dérivées ne se déduit pas du théorème de Morera.

COROLLAIRE 1.3. *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. Si la série $\sum u_k$ converge* ***normalement sur tout compact de*** *Ω, alors la fonction $f = \sum_0^\infty u_k$ est holomorphe sur Ω.*

Démonstration. On applique le théorème aux sommes partielles $f_n = \sum_{k=0}^n u_k$. □

EXEMPLE 1.4. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ converge normalement sur tout compact de $\Omega = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$. Par conséquent, la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$$

définit une fonction holomorphe sur Ω. Cette fonction s'appelle la **fonction Zeta de Riemann**.

Démonstration. Si K est un compact de $\Omega = \{\mathrm{Re}(s) > 1\}$, on peut trouver $\alpha > 1$ tel que $\mathrm{Re}(s) \geqslant \alpha$ pour tout $s \in K$. On a alors $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $s \in K$, ce qui prouve la convergence normale de la série. □

1.3. Intégrales à paramètres.

THÉORÈME 1.5. *Soit $F : I \times \Omega \to \mathbb{C}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On fait les hypothèses suivantes .*

(i) *$F(t, z)$ est mesurable en $t \in I$, et holomorphe en $z \in \Omega$.*

(ii) *Pour tout compact $K \subset \Omega$, on peut majorer $|F(t, z)|$ pour $z \in K$ par une fonction $g_K(t)$* ***indépendante de*** *z et intégrable sur I.*

Alors la formule

$$f(z) = \int_I F(t, z)\, dt$$

a un sens pour tout $z \in \Omega$ et définit une fonction holomorphe sur Ω. De plus, on peut dériver sous l'intégrale : pour tout $z \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(t,z)$ est intégrable sur I et

$$f^{(n)}(z) = \int_I \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(t,z)\,dt\,.$$

Remarque. L'hypothèse de domination (ii) est satisfaite si l'intervalle I est **borné** et si on peut majorer $|F(t,z)|$ **par une constante** pour $z \in K$. En particulier : *si I est un intervalle **compact** et si $F : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ est **continue** par rapport au couple de variables (t,z) et holomorphe par rapport à $z \in \Omega$, alors le théorème s'applique.*

Preuve du théorème. Comme $|F(t,z)| \leqslant g_{\{z\}}(t)$, la fonction $t \mapsto F(t,z)$ est intégrable sur I pour tout $z \in \Omega$, donc $f(z)$ est bien défini.

Soit K un compact quelconque de Ω, et soit $\varepsilon = \varepsilon_K > 0$ tel que $K^\varepsilon \subset \Omega$. D'après le lemme 1.1, on a

$$\begin{aligned}\sup_{z\in K}\left|\frac{\partial F}{\partial z}(t,z)\right| &\leqslant C(\varepsilon)\sup_{\xi\in K^\varepsilon}|F(t,\xi)|\\ &\leqslant C(\varepsilon)\,g_{K^\varepsilon}(t)\end{aligned}$$

pour tout $t \in I$. Comme $\frac{\partial F}{\partial x}(t,\cdot) = \frac{\partial F}{\partial z}(t,\cdot)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(t,\cdot) = i\,\frac{\partial F}{\partial z}(t,\cdot)$, on a donc

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(t,z)\right| \leqslant h_K(t) \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}(t,z)\right| \leqslant h_K(t)$$

pour tout $t \in I$ et pour tout $z \in K$, où $h_K = C(\varepsilon_K)\,g_K$ est intégrable sur I et indépendante de $z \in K$.

Ceci étant vrai pour tout compact $K \subset \Omega$, cela montre que la fonction F vérifie les hypothèses du théorème "usuel" concernant la dérivabilité des intégrales à paramètres. Par conséquent, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et ses dérivées partielles s'obtiennent en dérivant sous l'intégrale.

En particulier, on a

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) = \int_I \frac{\partial F}{\partial \bar z}(t,z)\,dt = 0$$

pour tout $z \in \Omega$, donc f est holomorphe ; et on a

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) = \int_I \frac{\partial F}{\partial z}(t,z)\,dt\,.$$

Enfin, ce qui précède montre que la fonction $\frac{\partial F}{\partial z}$ vérifie les mêmes hypothèses (i) et (ii) que F, et par récurrence on voit qu'il en est de même pour toutes les $\frac{\partial^n F}{\partial z^n}$. On peut donc calculer les dérivées successives de f en dérivant sous l'intégrale. □

Corollaire 1.6. *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'image Γ, et soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $F : \Gamma \times \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction continue telle que, pour tout $\xi \in \Gamma$, la fonction $z \mapsto F(\xi,z)$ est holomorphe sur Ω, alors la formule $f(z) = \int_\gamma F(\xi,z)\,d\xi$ définit une fonction holomorphe sur Ω.*

Démonstration. Par définition, on a $f(z) = \int_a^b F(\gamma(t),z)\,\gamma'(t)\,dt$. Si K est un compact de Ω, la fonction continue $(t,z) \mapsto F(\gamma(t),z)$ est *bornée* sur le compact $[0,2\pi]\times K$, disons $|F(t,z)| \leqslant M_K$; et on a alors $|F(\gamma(t),z)\,\gamma'(t)| \leqslant M_K\,|\gamma'(t)| = g_K(t)$ pour $z \in K$. La fonction g_K est intégrable sur $[a,b]$ car continue par morceaux, et par conséquent le théorème s'applique. □

Remarque 1. Le théorème 1.5 reste valable, avec la même démonstration, en remplaçant l'intervalle I muni de la mesure de Lebesgue par un espace mesuré $(I, \mathfrak{A}, \mu)$.

Remarque 2. Comme pour le théorème 1.2, l'holomorphie de la fonction f peut se déduire du théorème de Morera. Les détails constituent un bon exercice : il faut d'abord vérifier la continuité de f, puis utiliser le théorème de Fubini pour montrer que $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$ pour tout rectangle $R \subset \Omega$.

Exemple 1.7. Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$. La formule

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

définit une fonction holomorphe sur Ω. Cette fonction s'appelle la **fonction Gamma d'Euler**.

Démonstration. La fonction $F :]0, \infty[\times \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $F(t, z) = t^{z-1} e^{-t}$ est mesurable en $t \in]0, \infty[$ et holomorphe en $z \in \Omega$. De plus, on a

$$|F(t, z)| = t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-t}$$

pour tout $(t, z) \in]0, \infty[\times \Omega$.

Si K est un compact de Ω, on peut trouver $a > 0$ et $b < \infty$ tels que $a \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant b$ pour tout $z \in K$. On a alors $t^{\mathrm{Re}(z)-1} \leqslant t^{a-1}$ si $t \in]0, 1[$ et $t^{\mathrm{Re}(z)-1} \leqslant t^{b-1}$ si $t \geqslant 1$, pour tout $z \in K$. On obtient ainsi $|F(t, z)| \leqslant g_K(t)$, où

$$g_K(t) = \begin{cases} t^{a-1} e^{-t} & \text{si} \quad 0 < t \leqslant 1 \\ t^{b-1} e^{-t} & \text{si} \quad \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

La fonction g_K est intégrable sur $]0, 1]$ car elle est continue avec $g_k(t) \sim t^{a-1}$ au voisinage de 0 et $a - 1 > -1$; et elle est intégrable sur $[1, \infty[$ car $g_K(t) = O(1/t^2)$ en $+\infty$. Donc g_K est intégrable sur $]0, \infty[$.

D'après le théorème 1.5, on peut donc conclure que Γ est (bien définie et) holomorphe sur Ω. □

Exercice. Montrer qu'on a $\Gamma(z + 1) = z\,\Gamma(z)$ pour tout $z \in \Omega$, et en déduire la valeur de $\Gamma(n + 1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1.4. Une autre approche. Dans cette sous-section, on donne des démonstrations un peu différentes des théorèmes 1.2 et 1.5. Tout repose sur la formule de Cauchy et sur le lemme suivant, qui a été démontré au chapitre 3 (lemme 1.3 de ce chapitre).

Lemme 1.8. *Soit γ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$, d'image Γ, et soit $\varphi : \Gamma \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors la fonction $u : \mathbb{C} \backslash \Gamma \to \mathbb{C}$ définie par*

$$u(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \Gamma$.

Deuxième preuve du théorème 1.2. Pour montrer que $f = \lim f_n$ est holomorphe sur Ω, il suffit de vérifier qu'elle l'est sur tout disque ouvert D tel que $\overline{D} \subset \Omega$; fixons un tel disque $D = D(z_0, r)$. On utilisera le fait suivant (conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire) : si $z \in D$ et si on pose $\varepsilon(z) = r - |z - z_0|$, alors

$$\forall \xi \in \partial\Delta \ : \ |\xi - z| \geqslant \varepsilon\, .$$

(Le point important est que $\varepsilon(z)$ *ne dépend pas de* $\xi \in \partial D$).

Si $z \in D$, alors

$$f_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \tag{1.1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la formule de Cauchy. De plus, $\frac{f_n(\xi)}{\xi - z}$ tend vers $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ uniformément sur ∂D. En effet, comme $|z - \xi| \geqslant \varepsilon(z)$ pour tout $\xi \in \partial D$, on a

$$\left| \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} - \frac{f(\xi)}{\xi - z} \right| \leqslant \frac{|f_n(\xi) - f(\xi)|}{\varepsilon(z)}\,;$$

d'où le résultat puisque $f_n(\xi) \to f(\xi)$ uniformément sur le compact ∂D. Comme on intégre sur un compact, on peut donc passer à la limite dans (1.1) et on obtient

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

pour tout $z \in D$. D'après le lemme 1.8, cela prouve que f est holomorphe sur D.

Pour établir la convergence uniforme de f_n' vers f' sur tout compact de Ω, il suffit de vérifier que $f_n' \to f'$ uniformément sur tout disque fermé $\overline{D} \subset \Omega$. En effet, si K est un compact quelconque de Ω, on peut trouver des disques ouverts $D_1, \dots, D_N$ tels que $\overline{D_i} \subset \Omega$ pour tout i et $K \subset D_1 \cup \cdots \cup D_N$. Si on sait montrer que $f_n' \to f'$ uniformément sur chaque $\overline{D_i}$, on aura prouvé que $f_n' \to f'$ uniformément sur K.

Fixons un disque fermé $\overline{D} = \overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Choisissons également $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r' + \varepsilon) \subset \Omega$, et posons $\Delta = D(z_0, r + \varepsilon)$. D'après l'inégalité triangulaire, on a alors

$$\forall z \in \overline{D}\ \forall \xi \in \partial\Delta\ :\ |\xi - z| \geqslant \varepsilon\,. \tag{1.2}$$

Si $z \in \overline{D}$, alors

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi\,,$$

d'après la formule de Cauchy "dérivée une fois". De même, on a

$$f_n'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi\,.$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit

$$\begin{aligned} |f_n'(z) - f'(z)| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{|f_n(\xi) - f(\xi)|}{|\xi - z|^2}\, |d\xi| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{|f_n(\xi) - f(\xi)|}{\varepsilon^2}\, |d\xi| \end{aligned}$$

où on a utilisé (1.2). Comme $f_n(\xi) \to f(\xi)$ uniformément sur le compact $\partial\Delta$ et comme la majoration ne dépend pas de $z \in \overline{D}$, cela montre que $f_n'(z) \to f'(z)$ uniformément sur $\overline{D}$. □

Deuxième preuve du théorème 1.5. Si on utilise l'hypothèse de domination (ii) avec $K = \{z\}$, on obtient $|F(t,z)| \leqslant g_{\{z\}}(t)$. Par conséquent, la fonction $t \mapsto F(t,z)$ est intégrable sur I, et donc $f(z)$ est bien défini pour tout $z \in \Omega$.

La *continuité* de f sur Ω découle du théorème de continuité pour les intégrales à paramètres, ou directement du théorème de convergence dominée (ce qui revient au même) : si (z_n) est une suite de points de Ω convergeant vers un point $z \in \Omega$, alors

$F_n(t) := F(t, z_n)$ tend vers $F(t, z)$ pour tout $t \in I$ par continuité de $F(t, \cdot)$, et en notant K le compact $\{z\} \cup \{z_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, on a $|F_n(t)| \leqslant g_K(t)$ pour tout n ; donc $f(z_n) = \int_I F(_n(t)\, dt$ tend vers $\int_I F(t, z)\, dt = f(z)$ par convergence dominée.

Pour montrer que f est holomorphe sur Ω, il suffit (comme d'habitude) de vérifier qu'elle l'est sur tout disque ouvert D tel que $\overline{D} \subset \Omega$. Fixons un tel disque $D = D(z_0, r)$.

Comme $F(t, z)$ est holomorphe en z, on a

$$F(t, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{F(t, \xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

pour tout $t \in I$ et pour tout $z \in D$, d'après la formule de Cauchy. Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_I F(t, z)\, dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_I \left(\int_{\partial D} \frac{F(t, \xi)}{\xi - z}\, d\xi \right) dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \left(\int_I F(t, \xi)\, dt \right) \frac{d\xi}{\xi - z} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème de Fubini. D'après le lemme 1.8, on en déduit que f est holomorphe sur D.

Pour justifier l'utilisation du théorème de Fubini, il suffit de vérifier qu'on a

$$\int_{\partial D} \left(\int_I |F(t, \xi)|\, dt \right) \frac{|d\xi|}{|\xi - z|} < \infty\,.$$

En posant $K = \partial D$, on a $|F(t, \xi)| \leqslant g_K(t)$, donc $\int_I |F(t, \xi)|\, dt \leqslant C = \int_I g_K(t)\, dt$ pour tout $\xi \in \partial D$ et donc

$$\int_{\partial D} \left(\int_I |F(t, \xi)|\, dt \right) \frac{|d\xi|}{|\xi - z|} \leqslant C \int_{\partial D} \frac{|d\xi|}{|\xi - z|} < \infty$$

car la fonction $\xi \mapsto \frac{1}{|\xi - z|}$ est continue et donc bornée sur ∂D.

Pour montrer qu'on peut calculer les dérivées de f en dérivant sous l'intégrale, fixons un point $z_0 \in \Omega$. Choisissons $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$, et posons $D = D(z_0, r)$. D'après la formule de Cauchy dérivée, on a

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi\,.$$

Comme $f(\xi) = \int_I F(t, \xi)\, dt$, on obtient donc

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z_0) &= \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial D} \left(\int_I F(t, \xi)\, dt \right) \frac{d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \\ &= \int_I \left(\frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{F(t, \xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \right) dt \\ &= \int_I \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(t, z_0)\, dt\,, \end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème de Fubini à la deuxième ligne, et la fomule de Cauchy dérivée pour $F(t, \cdot)$ à la troisième. La fonction $t \mapsto \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(t, z_0)$ est bien intégrable sur I

car en posant $K = \partial D$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^n F}{\partial z^n}(t, z_0)\right| &= \left|\frac{n!}{2i\pi}\int_{\partial D}\frac{F(t,\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi\right| \\ &\leqslant \frac{n!}{2\pi}\int_{\partial D}\frac{g_K(t)}{r^{n+1}}\,|d\xi| \\ &= \frac{n!}{r^n}\,g_K(t)\,.\end{aligned}$$

Enfin, la justification du recours au théorème de Fubini est laissée en exercice. □

2. Produits infinis

Définition 2.1. *Soit $(a_n)_{n\geqslant 0)}$ une suite de nombres complexes. On dit que* ***le produit infini*** $\prod a_n$ ***est convergent*** *si la suite des “produits partiels” $P_N = \prod_{n=0}^N a_n$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ quand $N \to \infty$. Cette limite se note alors $\prod_{n=0}^\infty a_n$.*

Dans tout ce qui suit, on notera log la détermination principale du logarithme dans $\mathbb{C}^*$. Rappelons qu'on a par définition

$$\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, où l'argument est pris dans $]-\pi, \pi]$. Rappelons également que log n'est pas continue sur $\mathbb{C}^*$, mais qu'elle est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, avec $\log'(z) = \frac{1}{z}\cdot$

Proposition 2.2. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur un ensemble Ω. On suppose que la série $\sum(1-f_n)$ est* ***normalement convergente*** *sur Ω.*

(i) *Le produit infini $\prod f_n(z)$ est uniformément convergent sur Ω.*

(ii) *Si les f_n ne s'annulent pas, alors la série $\sum\log(f_n)$ est uniformément convergente, et on a $\prod_0^\infty f_n(z) = e^{S(z)}$, où $S = \sum_0^\infty \log(f_n)$. En particulier, la fonction $f = \prod_0^\infty f_n$ ne s'annule pas sur Ω.*

Pour la démonstration, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.3. *Si $h \in \mathbb{C}$ vérifie $|h| \leqslant 1/2$, alors $|\log(1+h)| \leqslant 2\,|h|$.*

Démonstration. L'énoncé du lemme a un sens car on a certainement $1 + h \neq 0$. La fonction log est holomorphe au voisinage du segment $[1, 1+h]$ car $[1, 1+h] \subset \overline{D}(1, 1/2) \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a donc

$$\begin{aligned}\log(1+h) &= \log(1) + \int_0^1 \log'(1+th)\,h\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{h}{1+th}\,dt\end{aligned}$$

et par conséquent

$$|\log(1+h)| \leqslant \int_0^1 \frac{|h|}{1-|th|}\,dt \leqslant 2\,|h|\,,$$

où la deuxième inégalité vient du fait que $|th| \leqslant |h| \leqslant 1/2$. □

Preuve de la proposition 2.2. (i) Par hypothèse, $1-f_n(z)$ tend vers 0 uniformément sur Ω, donc on peut trouver un entier N_0 tel que $|1-f_n(z)| \leqslant 1/2$ pour tout $n > N_0$ et pour tout $z \in \Omega$. D'après le lemme 2.3, on a alors $f_n(z) \neq 0$ et

$$\begin{aligned} |\log(f_n(z))| &= |\log(1+(f_n(z)-1))| \\ &\leqslant 2\,|f_n(z)-1| \end{aligned}$$

pour tout $n > N_0$ et pour tout $z \in \Omega$. On en déduit que la série $\sum_{n>N_0} \log(f_n(z))$ converge normalement (donc uniformément) sur Ω. Notons $S_0(z)$ la somme de cette série.

Pour $N \geqslant 0$, posons $P_N(z) = \prod_{n=0}^N f_n(z)$. Si $N > N_0$, alors

$$\begin{aligned} P_N(z) &= f_0(z)\cdots f_{N_0}(z) \times \prod_{n=N_0+1}^{N} f_n(z) \\ &= P_{N_0}(z) \times \exp\left(\sum_{n=N_0+1}^{N} f_n(z)\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, $P_N(z)$ tend vers $P_{N_0}(z) \times e^{S_0(z)}$ quand N tend vers l'infini. De plus, la convergence est **uniforme** par rapport à $z \in \Omega$ car la série $\sum_{n>N_0} \log(f_n)$ est uniformément convergente, la fonction exponentielle est uniformément continue sur les parties bornées de $\mathbb{C}$, et la fonction P_{N_0} est bornée. (Écrire les détails constitue un exercice *très* profitable). Ainsi, le produit infini $\prod f_n(z)$ est uniformément convergent.

(ii) On garde les notations de la preuve de (i). Comme les f_n ne s'annulent pas, les fonctions $\log(f_n)$ sont bien définies pour tout $n \geqslant 0$, et la série $\sum_{n\geqslant 0} \log(f_n)$ converge uniformément sur Ω car la série $\sum_{n>N_0} \log(f_n)$ converge uniformément. D'après la preuve de (i), on a

$$\begin{aligned} \prod_{n=0}^{\infty} f_n(z) &= f_0(z)\cdots f_{N_0}(z) \times \exp\left(\sum_{n=N_0+1}^{\infty} \log(f_n(z))\right) \\ &= \exp\left(\sum_{n=0}^{N_0} \log(f_n(z))\right) \times \exp\left(\sum_{n=N_0+1}^{\infty} \log(f_n(z))\right) \\ &= e^{S(z)}\,. \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.4. *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes telle que la série $\sum(1-a_n)$ est* ***absolument convergente****, alors le produit infini $\prod a_n$ est convergent ; et si de plus $a_n \neq 0$ pour tout n, alors $\prod_0^\infty a_n \neq 0$.*

Démonstration. On applique la proposition avec un ensemble Ω réduit à un point a et $f_n(a) = a_n$. □

Exercice 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.Montrer que si le produit infini $\prod a_n$ est convergent et si $\prod_0^\infty a_n \neq 0$, alors $a_n \to 1$ quand $n \to \infty$.

Exercice 2. En utilisant un développement limité, montrer que si (a_n) est une suite de nombres complexes telle que $\sum_0^\infty |a_n|^2 < \infty$, alors le produit infini $\prod \cos a_n$ est convergent.

On peut maintenant énoncer le résultat de base concernant les produits infinis de fonctions holomorphes.

Théorème 2.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que la série $\sum(1-f_n)$ converge* ***normalement sur tout compact de*** Ω.

(1) *Le produit infini $\prod f_n(z)$ converge uniformément sur tout compact de Ω, et la fonction $f = \prod_0^\infty f_n$ est holomorphe sur Ω.*

(2) *On a $Z(f) = \bigcup_{n\geqslant 0} Z(f_n)$, et la multiplicité d'un zéro $a \in Z(f)$ est la somme des multiplicités de a comme zéro des f_n.*

(3) *Si les f_n ne s'annulent pas, alors f ne s'annule pas et la dérivée logarithmique de f est donnée par la formule*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n'z)}{f_n(z)}\,,$$

où la série converge uniformément sur tout compact de Ω.

Démonstration. L'hypothèse entraine que la série $\sum(1-f_n(z))$ est absolument convergente pour tout $z \in \Omega$ (car $\{z\}$ est un compact de Ω !), donc la fonction f est bien définie sur Ω d'après le corollaire 2.4.

Supposons d'abord que la série $\sum(1-f_n)$ soit normalement convergente *sur Ω tout entier*.

(1) Par la proposition 2.2, le produit infini $\prod f_n(z)$ converge uniformément sur Ω. D'après le théorème 1.2, la fonction f est holomorphe car les produits partiels $P_N = \prod_0^N f_n$ le sont.

(2) Par hypothèse, $1-f_n(z)$ tend vers 0 (i.e. $f_n(z) \to 1$) uniformément sur Ω. On peut donc trouver un entier N tel que f_n ne s'annule pas pour $n > N$. D'après la proposition 2.2, on peut alors écrire

$$f(z) = f_0(z)\cdots f_N(z)\,e^{S(z)}\,,$$

où $S(z) = \sum_{N+1}^\infty \log(f_n(z))$. Comme e^S ne s'annule pas, on a donc

$$\begin{aligned} Z(f) &= Z(f_0\cdots f_N) \\ &= \bigcup_{n=0}^{N} Z(f_n) \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty} Z(f_n)\,, \end{aligned}$$

car $Z(f_n) = \varnothing$ si $n > N$. Enfin, l'assertion concernant les multiplicités est claire.

(3) Soit N_0 tel que $|1-f_n(z)| \leqslant 1/2$ pour tout $n > N_0$ et pour tout $z \in \Omega$. Alors f_n est à valeurs dans $\overline{D(1,1/2)} \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ pour $n > N_0$, donc $\log(f_n)$ est holomorphe sur Ω. D'après la proposition 2.2, on a

$$f(z) = P_0(z)e^{S_0(z)}\,,$$

où $P_0 = f_0\cdots f_{N_0}$ et $S_0 = \sum_{N_0+1}^\infty \log(f_n)$, la série étant uniformément convergente sur Ω. D'après le théorème 1.2, la fonction S_0 est holomorphe sur Ω avec

$$S_0'(z) = \sum_{n=N_0+1}^{\infty} (\log f_n)'(z) = \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,,$$

où la série converge uniformément sur tout compact de Ω. Comme de façon générale, la dérivée logarithmique d'un produit est la somme des dérivées logarithmiques des termes du produit (autrement dit : $\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$), on en déduit

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f} &= \frac{P_0'}{P_0} + \frac{(e^{S_0})'}{e^{S_0}} \\ &= \sum_{n=0}^{N_0} \frac{f_n'}{f_n} + S_0' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n'}{f_n}\,, \end{aligned}$$

où la série converge uniformément sur tout compact.

Traitons maintenant le cas général, où on suppose seulement que la série $\sum(1-f_n)$ converge normalement *sur tout compact de* Ω.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Omega_k = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < k \text{ et } \operatorname{dist}(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) > 1/k\}\,.$$

On vérifie facilement les deux propriétés suivantes (détails laissés en exercice) :

(i) les Ω_k sont ouverts, et les $\overline{\Omega_k}$ sont des compacts contenus dans Ω ;
(ii) tout compact $K \subset \Omega$ est contenu dans un Ω_k.

Par (i), on peut appliquer le 1er cas à chaque Ω_k ; et par (ii), on en déduit le théorème pour Ω. □

DÉFINITION 2.6. *Sous l'hypothèse du théorème (convergence normale de la série $\sum(1-f_n)$ sur tout compact), on dira que* ***le produit infini $\prod f_n$ converge normalement sur tout compact de*** Ω.

3. Zeta, Gamma et le sinus

3.1. Développement de $1/\zeta$ en produit infini. Rappelons que la fonction ζ est définie sur $\Omega = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$ par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}\,.$$

Dans ce qui suit, on notera $(p_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant : $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, ...

LEMME 3.1. *Le produit infini $\prod_{n\geqslant 0}\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)$ converge normalement sur tout compact de $\Omega = \{\mathrm{Re}(s) > 1\}$.*

Démonstration. En posant $f_n(s) = 1 - \frac{1}{p_n^s}$, on a

$$|1 - f_n(s)| = \left|\frac{1}{p_n^s}\right| = \frac{1}{p_n^{\mathrm{Re}(s)}}\,,$$

et comme $p_n \geqslant n$ pour tout n on en déduit sans difficulté que la série $\sum(1-f_n)$ converge normalement sur tout compact de Ω. □

THÉORÈME 3.2. *Si* $s \in \mathbb{C}$ *vérifie* $\mathrm{Re}(s) > 1$, *alors* $\zeta(s) \neq 0$ *et*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right).$$

Démonstration. Fixons s vérifiant $\mathrm{Re}(s) > 1$. Avant de commencer, faisons une remarque utile pour la suite : comme la série $\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{m^s}$ est absolument convergente, toutes ses sous-séries sont convergentes, donc la somme

$$\sum_{m\in A}\frac{1}{m^s}$$

a un sens pour tout ensemble $A \subset \mathbb{N}^*$.

Pour $N \in \mathbb{N}$, posons $P_N(s) = \prod_0^N\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\zeta(s)\,P_0(s) &= \zeta(s) \times \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}\right) \times \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^s} \\
&= \sum_{m\in A_0}\frac{1}{m^s}\,.
\end{aligned}$$

où A_0 est l'ensemble des entiers $m \geqslant 1$ non divisibles par $p_0 = 2$.

De même, on trouve

$$\begin{aligned}
\zeta(s)\,P_1(s) &= \zeta(s)P_0(s) \times \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \\
&= \sum_{k\in A_0}\frac{1}{k^s} - \sum_{k\in A_0}\frac{1}{(3k)^s} \\
&= \sum_{m\in A_1}\frac{1}{m^s}\,,
\end{aligned}$$

où A_1 est l'ensemble des entiers $m \in A_0$ qui ne sont pas de la forme $3k$ où $k \in A_0$, c'est-à-dire exactement l'ensemble des entiers $m \geqslant 1$ qui ne sont divisibles ni par $p_0 = 2$, ni par $p_1 = 3$. (On utilise ici le fait que l'ensemble $\{3k;\ k \in A_0\}$ est contenu dans A_0, ce qui est vrai car p_0 et $p_1 = 3$ sont premiers entre eux).

Par récurrence, on obtient

$$\zeta(s)P_N(s) = \sum_{m\in A_N}\frac{1}{m^s}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$, où A_N est l'ensemble des entiers $m \geqslant 1$ qui ne sont divisibles par aucun des nombres premiers $p_0, \ldots, p_N$.

Par définition de A_N, on a $m > p_N$ pour tout $m \in A_N$ différent de 1 (le plus petit diviseur premier de n doit être strictement plus grand que p_N), et donc

$$\begin{aligned} |\zeta(s)P_N(s) - 1| &= \left| \sum_{m \in A_N \setminus \{1\}} \frac{1}{m^s} \right| \\ &\leqslant \sum_{m > p_N} \frac{1}{|m^s|} \end{aligned}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$. Comme $p_N \to \infty$, on en déduit que $\zeta(s)P_N(s)$ tend vers 1 quand $N \to \infty$. On obtient ainsi

$$\zeta(s) \times \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) = 1\,,$$

ce qui termine la démonstration.

□

Corollaire 3.3. *La série* $\sum \frac{1}{p_n}$ *est divergente.*

Démonstration. Si cette série était convergente, alors la série $\sum \frac{1}{p_n^s}$ serait normalement convergente sur $[1, \infty[$, puisque $\left|\frac{1}{p_n^s}\right| \leqslant \frac{1}{p_n}$ pour tout $s \geqslant 1$. D'après la proposition 2.2, le produit infini $\prod \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)$ serait donc uniformément convergent sur $[1, \infty[$, avec $\prod_0^\infty \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \neq 0$ car $1 - \frac{1}{p_n} \neq 0$ pour tout n. La fonction f définie par $f(s) = \prod \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)$ serait alors *continue* sur $[1, \infty[$, avec $f(1) \neq 0$. Comme $f(s) = 1/\zeta(s)$ pour $s > 1$, on en déduirait que $\zeta(s)$ admet une limite finie quand $s \to 1^+$. Mais d'après le théorème de convergence monotone (pour les séries), on a

$$\lim_{s \to 1^+} \zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty\,.$$

□

3.2. Développement de $1/\Gamma$ en produit infini. Rappelons que la fonction Γ est définie sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$ par la formule

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt\,.$$

Dans cette sous-section, on va développer la fonction $1/\Gamma$ en produit infini. Pour ce faire, on aura besoin de trois lemmes "d'intérêt indépendant".

Lemme 3.4. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\mathrm{Re}(z) > 0$, *on a*

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}\,.$$

Démonstration. Commençons par vérifier que

$$(*) \qquad \Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt\,.$$

On sait que pour tout $t > 0$, on a

$$e^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n .$$

De plus, si $n \geqslant 1$ et si $t \in]0, n[$ alors

$$0 \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n\log\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leqslant e^{-t} ,$$

car $\log\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leqslant -\frac{t}{n}\cdot$ Donc, si on fixe z et si on pose

$$f_n(t) = \mathbf{1}_{]0,n[}(t)\, t^{z-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n ,$$

alors la suite (f_n) converge simplement sur $]0, \infty[$ vers $f(t) = t^{z-1}e^{-t}$, et $|f_n(t)| \leqslant |f(t)|$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme la fonction f est intégrable sur $]0, \infty[$, on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir $(*)$.

Maintenant, posons

$$I_n(z) = \int_0^n t^{z-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt .$$

En effectuant le changement de variable $u = \frac{t}{n}$, on trouve

$$\begin{aligned} I_n(z) &= n^z \int_0^1 u^{z-1}(1-u)^n\, du \\ &= n^z\, J_n(z) . \end{aligned}$$

Ensuite, on intégre par parties $J_n(z)$ en primitivant u^{z-1} et en dérivant $(1-u)^n$, ce qui donne

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \left[\frac{u^z}{z}(1-u)^n\right]_0^1 + \frac{n}{z}\int_0^1 u^z(1-u)^{n-1}\, du \\ &= \frac{n}{z}\, J_{n-1}(z+1) \end{aligned}$$

pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout z vérifiant $\mathrm{Re}(z) > 0$. Par récurrence, on en déduit

$$J_n(z) = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\, J_0(z+n) .$$

Comme $J_0(z+n) = \int_0^1 u^{z+n-1} du = \frac{1}{z+n}$, on obtient finalement

$$I_n(z) = \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

pour tout $n \geqslant 1$, ce qui termine la démonstration d'après $(*)$. □

Lemme 3.5. *La suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$ est convergente, et sa limite γ est strictement positive. Le nombre γ s'appelle la* ***constante d'Euler****.*

Démonstration. Pour $t \geqslant 1$, posons $f(t) = 1/t$. On a ainsi

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t)\, dt .$$

On en déduit

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\, dt \leqslant 0$$

car la fonction f est décroissante et donc $f(t) \geqslant f(n+1)$ pour tout $t \in [n, n+1]$. Ainsi, la suite (γ_n) est décroissante.

D'autre part, on a

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\, dt \right) + f(n)\,;$$

et comme f est décroissante et $f(n) \geqslant 0$, on en déduit $\gamma_n \geqslant 0$. Ainsi, la suite (γ_n) est décroissante et minorée par 0, donc admet une limite $\gamma \geqslant 0$.

Comme chaque terme de la somme précédente est positif, on a en fait

$$\gamma_n \geqslant f(1) - \int_1^2 f(t) = 1 - \log 2$$

pour tout $n \geqslant 1$, et donc $\gamma \geqslant 1 - \log 2 > 0$.

□

Lemme 3.6. *Le produit infini* $\prod_{k\geqslant 1} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$ *converge normalement sur tout compact de* $\mathbb{C}$.

Démonstration. Posons $f_k(z) = \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$. Pour pouvoir appliquer le théorème 2.5, il faut majorer convenablement $|1 - f_k(z)|$.

On a $f_k(z) = \varphi(\frac{z}{k})$, où $\varphi(u) = (1 + u)e^{-u}$. La fonction φ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, avec $\varphi'(u) = -ue^{-u}$. On a donc $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$. Par conséquent, on peut écrire

$$\varphi(u) = 1 + u^2 h(u)\,,$$

où h est une fonction entière, et donc

$$f_k(z) - 1 = \left(\frac{z}{k}\right)^2 h\left(\frac{z}{k}\right).$$

Pour tout $R > 0$ et $z \in \overline{D}(0, R)$, on a donc

$$|1 - f_k(z)| \leqslant \frac{R^2}{k^2} \times M(R)\,,$$

où $M(R) = \sup\{|h(u)|;\ |u| \leqslant R\}$. Cela prouve que la série $\sum(1 - f_k)$ converge normalement sur tout disque $\overline{D}(0, R)$, et donc sur tout compact de $\mathbb{C}$. □

Théorème 3.7. *Si* $z \in \mathbb{C}$ *vérifie* $\mathrm{Re}(z) > 0$, *alors* $\Gamma(z) \neq 0$ *et*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}\,,$$

où γ *est la constante d'Euler.*

Démonstration. D'après le lemme 3.4, on a

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}\,\cdot$$

D'autre part, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\,n^z} &= z\left(\frac{z+1}{1}\right)\left(\frac{z+2}{2}\right)\cdots\left(\frac{z+n}{n}\right)\times\frac{1}{n^z}\\ &= z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\times e^{-z\log n}\\ &= z\,e^{\gamma_n z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}},\end{aligned}$$

où $\gamma_n = \sum_1^n \frac{1}{k} - \log n$. Comme γ_n tend vers γ quand $n\to\infty$, on en déduit

$$\Gamma(z)\times z\,e^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}} = 1\,.$$

□

3.3. Développement du sinus en produit infini.

THÉORÈME 3.8. *Pour tout $z\in\mathbb{C}$ on a*

$$\sin(\pi z) = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right),$$

où le produit infini converge normalement sur tout compact.

Démonstration. La convergence normale du produit infini est très facile à vérifier. Pour établir la formule souhaitée, le point de départ est l'identité

$$e^u = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{u}{k}\right)^k,$$

valable pour tout nombre complexe u (voir le chapitre 1, corollaire 4.13). D'après cette identité et la définition du sinus complexe, on a pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\sin(\pi z) &= \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2i}\left[\left(1+\frac{i\pi z}{2K}\right)^{2K} - \left(1-\frac{i\pi z}{2K}\right)^{2K}\right]\\ &= \lim_{K\to\infty} P_K(z)\,.\end{aligned}$$

(On prend des exposants pairs $2K$ par "commodité technique").

FAIT. On a $P_K(z) = \pi z\prod_{n=1}^{K-1}\left(1-\frac{z^2}{\alpha_{n,K}^2}\right)$, où $\alpha_{n,K} = \frac{2K}{\pi}\tan\left(\frac{n\pi}{2K}\right)\cdot$

Preuve du fait. Le polynôme P_K semble être de degré $2K$, mais en fait il est de degré de degré $2K-1$: vérifier que le coefficient de z^{2K} est nul, et celui de z^{2K-1} ne l'est pas. De plus, le coefficients de z dans $P_K(z)$ est égal à $P_K'(0)=\pi$. Comme le polynôme apparaissant au second membre de l'identité à établir est également de degré $2K-1$ avec le même coefficient devant z, il suffit donc de vérifier que ces deux polynômes ont les mêmes racines (avec les mêmes multiplicités). Autrement dit, il s'agit de voir que les racines de P_K sont 0 et les $\pm\alpha_{n,K}$ pour $1\leqslant n\leqslant K-1$.

Un nombre complexe z est racine de P_K si et seulement si $\left(1+\frac{i\pi z}{2K}\right)^{2K} = \left(1-\frac{i\pi z}{2K}\right)^{2K}$, ce qui signifie qu'on peut écrire

$$1+\frac{i\pi z}{2K} = \omega\left(1-\frac{i\pi z}{2K}\right),$$

où ω est une racine $2K$-ième de 1. Cette équation n'a pas de solution si $\omega = -1$; et si $\omega \neq -1$ on obtient

$$z = \frac{2K}{i\pi}\frac{\omega-1}{\omega+1} \cdot$$

Les racines $2K$-ièmes de 1 différentes de $-1 = e^{i\pi}$ sont de la forme

$$\omega_{K,n} = e^{in\pi/K},$$

où $-(K-1) \leqslant n \leqslant (K-1)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \frac{e^{in\pi/K}-1}{e^{in\pi/K}+1} &= \frac{e^{in\pi/2K}-e^{-in\pi/2K}}{e^{in\pi/2K}+e^{-in\pi/2K}} \\ &= i\,\tan\left(\frac{n\pi}{2K}\right)\cdot \end{aligned}$$

Ainsi, les racines de P_K sont les $\alpha_{n,K}$ pour $-(K-1) \leqslant n \leqslant K-1$, autrement dit $\alpha_{0,K} = 0$ et les $\alpha_{n,K}$ pour $1 \leqslant |n| \leqslant K-1$. □

Fixons maintenant $z \in \mathbb{C}$. D'après le fait, on peut écrire

$$P_K(z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} f_n(K),$$

où $f_n(K)$ est donné par

$$f_n(K) = \begin{cases} 1-\frac{z^2}{\alpha_{n,K}^2} & \text{si} \quad n \leqslant K-1 \\ 1 & \text{si} \quad n \geqslant K \end{cases}$$

Comme $\tan x \geqslant x$ pour tout $x \in [0,\pi/2[$, on a pour $n \leqslant K-1$

$$\begin{aligned} |1-f_n(K)| &= |\,z|^2\frac{(2K/\pi)^2}{\tan^2(n\pi/2K)} \\ &\leqslant \frac{|z|^2}{n^2}\,; \end{aligned}$$

et cette inégalité est bien sûr aussi valable pour $n \geqslant K$ puisque dans ce cas $1-f_n(K) = 0$. Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 1}(1-f_n(K))$ converge *normalement* sur $\Omega = \mathbb{N}^*$. D'après la proposition 2.2, on en déduit que le produit infini $\prod_{n\geqslant 1} f_n(K)$ converge *uniformément par rapport à* $K \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit, si on pose

$$Q_{N,K} = \pi z \prod_{n=1}^{N} f_n(K)$$

alors on a

$$\lim_{N\to\infty} Q_{N,K} = P_K(z) \quad \text{uniformément}/K\,.$$

D'autre part, $\alpha_{n,K} = \frac{2K}{\pi}\,\tan\left(\frac{n\pi}{2K}\right)$ tend vers n quand $K \to \infty$ car $\tan u \sim u$ quand $u \to 0$. Donc

$$\lim_{K\to\infty} Q_{N,K} = Q_N := \pi z \prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

pour tout N fixé.

Un argument de “double limite” permet alors d’écrire

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{K\to\infty} Q_{N,K} = \lim_{K\to\infty}\lim_{N\to\infty} Q_{N,K}\,;$$

autrement dit (puisque $\lim_{K\to\infty}\lim_{N\to\infty} Q_{N,K} = \lim_{K\to\infty} P_K(z) = \sin(\pi z)$) :

$$\lim_{N\to\infty} Q_N = \sin(\pi z)\,. \tag{3.1}$$

Comme $\lim_{N\to\infty} Q_N = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$, on obtient donc la formule souhaitée.

Voici les détails pour (3.1). Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme (par rapport à K) de $Q_{N,K}$ vers $P_K(z)$, on peut trouver N_0 tel que $|Q_{N,K} - P_K(z)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $N \geqslant N_0$ *et pour tout* K. En fixant N et en faisant tendre K vers l’infini, on en déduit $|Q_N - \sin(\pi z)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $N \geqslant N_0$, d’où (3.1). □

Corollaire 3.9. *Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, alors on a l’identité suivante, qu’on appelle la* **formule des compléments** *:*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Démonstration. D’après le lemme 3.4, on a

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \lim_{n\to\infty} u_n\,,$$

où

$$u_n = \frac{z(1+z)(2+z)\cdots(n+z)}{n!\,n^z} \times \frac{(1-z)(2-z)\cdots(n-z)(n+1-z)}{n!\,n^{1-z}}\,.$$

D’autre part, on peut réorganiser u_n comme suit :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n+1-z}{n} \times z \times \frac{(1^2-z^2)(2^2-z^2)\cdots(n^2-z^2)}{(n!)^2} \\ &= \frac{n+1-z}{n} \times z \times \left(\frac{1^2-z^2}{1^2}\right)\left(\frac{2^2-z^2}{2^2}\right)\cdots\left(\frac{n^2-z^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{n+1-z}{n} \times z \times \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right). \end{aligned}$$

D’après le théorème 3.8, on en déduit $\lim_{n\to\infty} u_n = z\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}$, d’où la formule des compléments. □

Corollaire 3.10. *Pour tout $w \in \mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z}$, on a*

$$\mathrm{cotan}(w) = \frac{1}{w} + 2w\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{w^2-n^2\pi^2}\,.$$

Démonstration. Posons $f(z) = \sin(\pi z)$. D’après les théorèmes 3.8 et 2.5, on peut écrire pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(\pi z)'}{(\pi z)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-z^2/n^2)'}{(1-z^2/n^2)}\,,$$

autrement dit

$$\pi\,\mathrm{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} - 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-z^2}\,.$$

La formule pour cotan(w) s'en déduit en prenant $z = \frac{w}{\pi}\cdot$ $\square$